INCAE BUSINESS SCHOOL
11373

Notas de Matemáticas Financieras

Esta nota fue escrita por el Profesor Carlos Quintanilla, de la Facultad de INCAE. Reproducida para servir como base de discusión en clase, más bien que como ilustración del manejo correcto o incorrecto de la gestión administrativa.

Índice general

CAPÍTULO 1

Interés Simple y Compuesto

En esta primera clase comenzaremos el estudio de las matemáticas financieras. Cubriremos los conceptos más elementales de la disciplina. Estos conceptos son interés, tasa de interés, interés simple e interés compuesto. Puede que algunos de ustedes ya estén familiarizados con algunos de estos conceptos, pero yo asumiré para efectos de la clase que este material es nuevo para todos.

1. Interés

Definamos *interés* como el precio del dinero, como el costo por usar dinero ajeno. El interés se mide en unidades monetarias; por ejemplo, en córdobas, colones, o dólares.[1] Se mide también en unidades de tiempo, usualmente un año.

La *tasa de interés* es un concepto muy relacionado. Mientras el *interés* se mide en dólares, la tasa de interés se mide en porcentajes. Por lo tanto, es un número mayor que 0 pero menor que 1. Una tasa anual de interés del 5 %, o 0.05, significa que por cada dólar que se pida prestado el día de hoy se tendrán que devolver $1.05 dentro de un año.

No estudiaremos en esta clase de dónde sale o cómo se determina la tasa de interés. Esto lo harán en los cursos de finanzas y macroeconomía. Aquí simplemente la tomaremos como un dato más.

1.1. Interés Simple.

Hay dos maneras distintas maneras de calcular el interés devengado por una transacción financiera. Podemos calcularlo utilizando el método de interés *simple* o *compuesto*. Comencemos con el interés simple en el contexto de un ejercicio.

Ejemplo 1.1: Supongan que el día de hoy deposito $100 en una cuenta bancaria en el banco A que paga el 5 % de interés simple. Pienso mantener el dinero en el banco por un periodo de 10 años. Chequeemos cómo crece este dinero a través del tiempo. El día de hoy tengo $100 o

$$V_0 = 100.$$

Al cabo de un año, tendré

$$\begin{aligned} V_1 &= 100 + 0{,}05 * 100 \\ V_1 &= 100 + 5 = 105. \end{aligned}$$

Durante el primer año gané, en concepto de intereses, $5.

¿Cuánto tendré al cabo de dos años? Aquí tenemos nuestro primer dilema. Durante el primer año, estaba claro que el 5 % se iba a calcular sobre la inversión inicial de $100. Pero, ¿ahora? ¿Sobre qué monto se calculan los intereses? ¿Sobre el

[1]En esta clase y en estas notas utilizaré el dólar como la moneda con la que se realizan todas las transacciones.

monto inicial de \$100? o ¿sobre el monto acumulado al cabo de un año, los \$105? La respuesta a esta pregunta es precisamente lo que distinguirá al interés simple del interés compuesto. El método del interés simple ignora por completo que se recibieron intereses en el primer año. Al cabo de dos años, tendré los \$105 que tenía al final del primer año más los intereses que se ganen durante el segundo año, pero estos calculados *sobre la misma base* usada el primer año.

$$\begin{aligned} V_2 &= 105 + 0{,}05 * 100 \\ &= 105 + 5 = 110 \end{aligned}$$

El monto de intereses devengados durante el segundo año es *nuevamente* \$5. Es fácil extrapolar lo que ocurrirá en años posteriores y así desarrollar una fórmula general.

$$\begin{aligned} V_0 &= 100 \\ V_1 &= V_0 + V_0 * 0{,}05 \\ &= V_0\ (1 + 0{,}05) \\ &= 100\ (1 + 0{,}05) \\ &= 105 \\ V_2 &= V_1 + V_0 * 0{,}05 \\ &= V_0\ (1 + 0{,}05) + V_0 * 0{,}05 \\ &= V_0 + 2 * 0{,}05 * V_0 \\ &= V_0\ (1 + 2 * 0{,}05) \\ &= 100\ (1 + 0{,}10) \\ &= 110 \\ V_3 &= V_2 + V_0 * 0{,}05 \\ &= V_0\ (1 + 2 * 0{,}05) + V_0 * 0{,}05 \\ &= V_0\ (1 + 3 * 0{,}05) \\ &= 100\ (1 + 0{,}15) \\ &= 115 \end{aligned}$$

Lo único que va cambiando es el coeficiente que multiplica a la tasa de interés. Al cabo de 10 años, podemos conjeturar que tendremos

$$\begin{aligned} V_{10} &= V_0\ (1 + 10 * 0{,}05) \\ &= 100\ (1 + 0{,}5) \\ &= 150. \end{aligned}$$

Esta es efectivamente la respuesta. Una manera de comprobarla es notando que los intereses percibidos cada año son los mismos, \$5. Si tenemos el dinero en el banco por 10 años, habremos ganado en intereses \$5*10=\$50. Si a esto sumamos la suma inicial, tendremos los \$150.

La fórmula para el caso general es fácilmente deducible

$$V_n = V_0\ (1 + n * s) \tag{1.1}$$

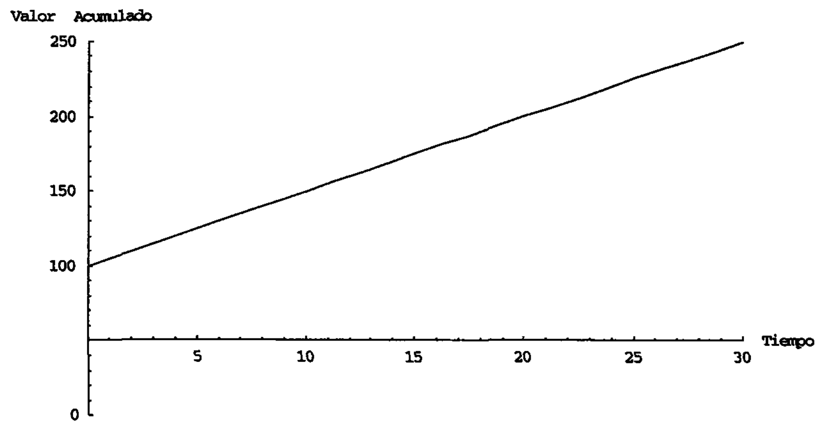

FIGURA 1. Monto Acumulado usando Interés Simple. Tasa de interes, s=0.05. Inversión inicial es $100.

donde V_n es el monto final (incluyendo monto inicial más intereses percibidos), V_0 es el monto inicial depositado en el banco (en el ejemplo anterior los $100), n es el plazo de la inversión medido en número de años y s es la tasa de interés *simple*.

Si analizamos esta fórmula un poco nos daremos cuenta que, visto como función del tiempo n, el monto acumulado, V_n, es una función lineal. El intercepto (el valor de la función cuando no ha transcurrido nada de tiempo, cuando $n = 0$) es igual a V_0 y la pendiente de la recta es la tasa de interés s. La figura 1 muestra esta relación para nuestro ejemplo. La figura 2 muestra qué ocurriría para otras dos tasas de interés. Deténganse a pensar por un minuto. Dado un periodo de tiempo determinado, digamos 10 años, entre mayor es la tasa de interés, mayor será el monto acumulado hasta ese momento. De igual forma, dada una tasa de interés, entre más tiempo transcurra, mayor también será el monto acumulado. Noten, sin embargo, que este monto crece *lentamente,* crece linealmente. En otras, palabras no vemos ninguna tendencia a que explote hacia arriba como lo hará con interés compuesto. Esto es buenas noticias si nosotros somos los que debemos el dinero, pero malas noticias si nosotros somos los depositantes. El interés simple no es una gran manera de hacer dinero.

1.2. Interés Compuesto.

Pasemos ahora al caso más común y más relevante, el caso del interés compuesto. Retomemos el mismo ejemplo que discutimos en la sección de interés simple para facilitar la comparación entre ambos.

Ejemplo 1.2: Supongan que el día de hoy deposito $100 en una cuenta bancaria en el banco B que paga el 5 % de interés compuesto. Pienso mantener el dinero en el banco por un periodo de 10 años. Al cabo de un año, tendré en el banco B

$$\begin{aligned} V_1 &= 100 + 0{,}05 * 100 \\ &= 100 + 5 = 105. \end{aligned}$$

Durante el primer año gané, en concepto de intereses, $5. "Un segundito", me dirán ustedes. "Esa era la misma respuesta para el caso de interés simple". Correcto.

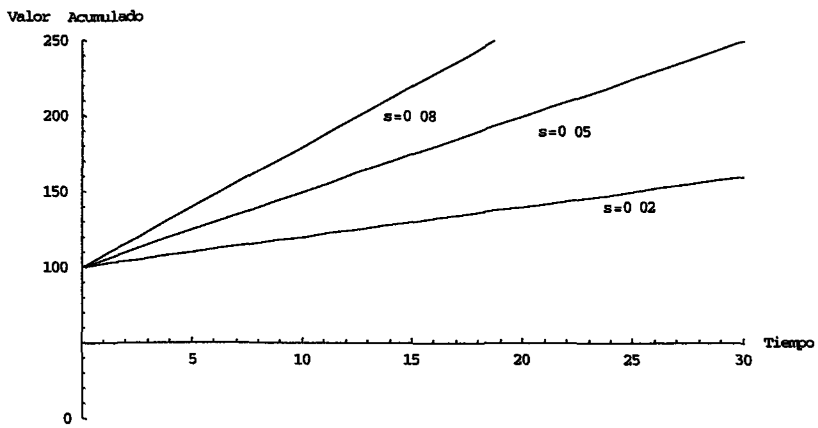

FIGURA 2. Interés Simple: Comparación de tres tasas, s=0.02, s=0.05 y s=0.08.

Para el primer periodo no hay diferencia alguna entre ambos métodos. La diferencia aparece en el segundo periodo. Ahora, a diferencia del caso anterior, cuando queremos calcular los intereses devengados en el segundo periodo, los calculamos sobre el monto total (inversión inicial + intereses) acumulado al final del primer periodo. En otras palabras, los intereses ganan intereses; los intereses se capitalizan. Al cabo de dos años tendré

$$\begin{aligned} V_2 &= V_1\ (1+0{,}05) \\ &= V_0\ (1+0{,}05)(1+0{,}05) \\ &= V_0\ (1+0{,}05)^2 \\ &= 100\ (1{,}05)^2 = 110{,}25 \end{aligned}$$

Al cabo de tres años, el proceso se repite y los intereses devengados durante el año 2 se capitalizan también.

$$\begin{aligned} V_3 &= V_2\ (1+0{,}05) \\ &= V_0(1{,}05)^2(1{,}05) \\ &= V_0\ (1{,}05)^3 = 115{,}76 \end{aligned}$$

Y así sucesivamente. Al cabo de 10 años tendremos

$$\begin{aligned} V_{10} &= V_0\ (1+0{,}05)^{10} \\ &= 100\ (1{,}05)^{10} = 162{,}88. \end{aligned}$$

Como podrán verificar, esta es una suma mayor que la que logramos acumular con interés simple.

El caso general es fácil de derivar:

$$V_n = V_0\ (1+i)^n \tag{1.2}$$

donde V_n es el monto acumulado al cabo de n periodos de inversión, V_0 es la inversión inicial e i es la tasa de interés *compuesta*. Esta es la fórmula más importante

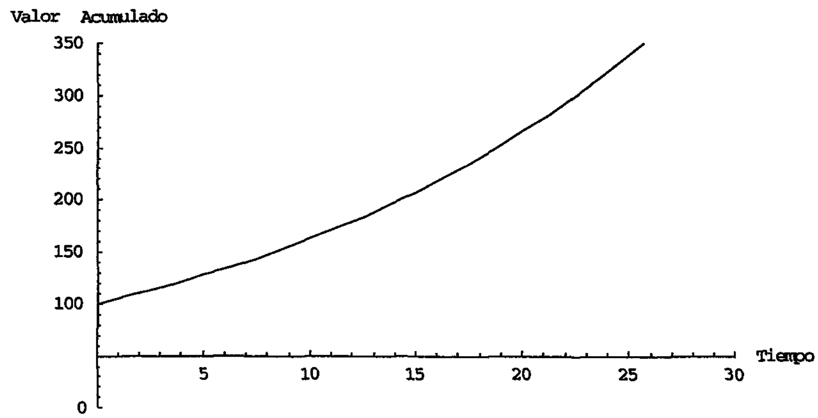

FIGURA 3. Monto Acumulado usando Interés Compuesto. Tasa de interés, s=0.05. Inversión inicial es \$100.

de matemáticas financieras. A partir de esta fórmula derivaremos fórmulas para anualidades, perpetuidades y bonos en clases futuras.

Noten que la ecuación 1.2 ya no es la ecuación de una línea recta. Su gráfico es más bien exponencial como lo muestra la figura 3. Ese es precisamente el gráfico que queremos tener cuando somos los depositantes, pero no los deudores. La figura 4 compara los dos ejemplos–con interés simple y con interés compuesto. Noten que la diferencia entre ambos métodos se va haciendo mayor y mayor a medida que pasa el tiempo. También es mayor para tasas de interés más altas. Por ejemplo, con una tasa de interés del 15 %, si invertimos \$100 al cabo de 30 años tendremos \$550 con interés simple y \$6,621.17 con interés compuesto. Verifíquenlo a modo de ejercicio.

En el resto del curso sólo trabajaremos con interés compuesto porque este es el que describe la gran mayoría de instrumentos financieros disponibles en el mercado.

2. Valor Futuro y Valor Presente de un Monto

En la sección anterior nos hacíamos la siguiente pregunta: Si deposito \$100 el día de hoy, ¿cuánto tendré al cabo de 10 años si la tasa de interés compuesta es 5 %? Estábamos preguntándonos por el *valor futuro* (el valor dentro de 10 años) que tendrán esos \$100 disponibles el día de hoy. La respuesta es \$162.88. Ahora consideren la pregunta inversa:

Ejemplo 1.3 Dentro de 8 años necesitaré tener \$15,000 en el banco para poder financiar un proyecto personal. ¿Cuánto necesito depositar en el banco el día de hoy para alcanzar esa meta si la tasa de interés es 12 %?

Para resolver este problema podemos usar la fórmula

$$V_n = V_0\ (1+i)^n.$$

Esta vez conocemos $V_n = V_8 = 15000$. Conocemos también la tasa de interés, $i = 0{,}12$, y el número de periodos $n = 8$. Sólo necesitamos despejar la ecuación en

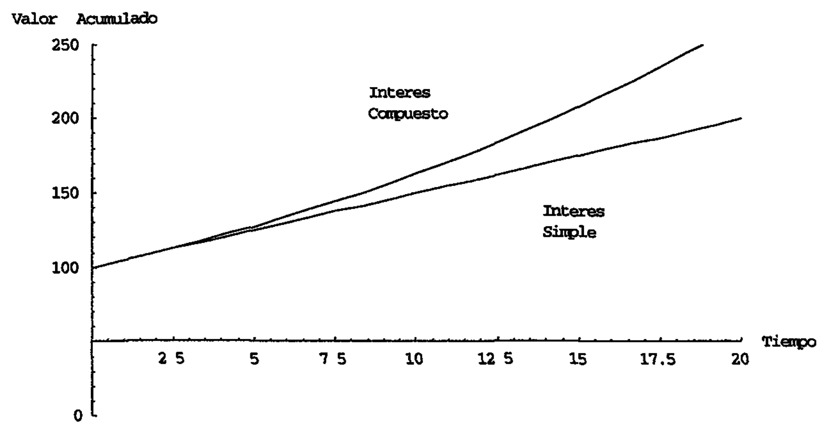

FIGURA 4. Comparando Interés Simple y Compuesto. s=0.05 vs i=0.05.

términos de V_0.

$$V_0 = \frac{V_n}{(1+i)^n}$$

Esta fórmula se conoce como la fórmula del *valor presente de* V_n, y el acto de dividir entre $(1+i)^n$ se conoce como *descontar* un flujo futuro o *traerlo a valor presente.*

Substituyendo los números obtenemos

$$V_0 = \frac{15000}{(1+0{,}12)^8} = 6058{,}2$$

No hay nada especial sobre el periodo 0. La fórmula de valor presente puede utilizarse para descontar a periodos otros que el periodo 0 como ilustra la siguiente variación del ejemplo anterior.

Ejemplo 1.4: Dentro de 8 años necesitaré tener $15,000 en el banco para poder financiar un proyecto personal. Este año las cosas no me han ido muy bien y no puedo ahorrar nada. El año entrante no luce nada mejor. ¿Cuánto necesito depositar en el banco *dentro de 2 años* para alcanzar esa meta si la tasa de interés es 12 %?

Ahora lo que quiero conocer es V_2. Conozco $V_8 = 15000$ y conozco la tasa de interés, $i = 0{,}12$. La siguiente ecuación debe ser correcta:

$$\begin{aligned} V_8 &= V_2\,(1+0{,}12)^6 \\ V_2 &= \frac{V_8}{(1+0{,}12)^6} \end{aligned}$$

Noten que elevo a la 6 y no a la 8. Lo que importa es la distancia entre ambos flujos y no la distancia con respecto al periodo 0. Asegúrense que entienden esto muy bien. Si no lo entienden pregúntenselo a sus compañeros. Si no obtienen una respuesta satisfactoria, pregúntenmelo a mi.

Substituyendo los números obtenemos

$$V_2 = \frac{15000}{(1+0{,}12)^6} = 7599{,}5$$

Noten que si espero 2 años para hacer el depósito, debo ahorrar más de lo que necesitaba en el ejemplo 1.3. Tiene sentido. Le estoy dando menos tiempo a la tasa de interés para actuar.

CAPÍTULO 2

Tasas Nominales, Tasas por Periodo y Periodos de Capitalización

En el capítulo anterior estudiamos el concepto de interés compuesto. Asumimos implícitamente que los intereses se capitalizaban al final de cada año. En la realidad, los periodos de capitalización varían de contrato a contrato. Es necesario adaptar nuestro análisis a estas condiciones.

1. Periodos y Frecuencia de Capitalización

El periodo de tiempo que transcurre entre dos capitalizaciones de intereses se conoce como el *periodo de capitalización.* Los periodos más comúnmente usados son años, semestres, trimestres, meses y días.

El número de veces que se capitalizan los intereses durante un año se conoce como la *frecuencia de capitalización.* Hay, obviamente, una estrecha relación entre periodo de capitalización y frecuencia de capitalización.

- Si el periodo de capitalización es un año, la frecuencia de capitalización será 1.
- Si el periodo de capitalización es un semestre (1/2 año), la frecuencia de capitalización será $1/(1/2) = 2$.
- Si el periodo de capitalización es un trimestre (1/4 de año), la frecuencia de capitalización será $1/(1/4) = 4$.
- Si el periodo de capitalización es un mes (1/12 de año), la frecuencia de capitalización será $1/(1/12) = 12$.

¿Cómo cambia esto nuestro análisis del capítulo anterior? Resulta que muy poco como quedará claro después de un par de ejemplos.

Ejemplo 2.1: Supongan que el día de hoy deposito $600 en una cuenta que paga 7 % capitalizable semestralmente. ¿Cuánto tendré al cabo de 5 años? La solución del ejercicio consiste de dos partes:

1. Debemos transformar la tasa anual de 7 % en una tasa *por periodo*: en este caso en una tasa por semestre.
2. Debemos transformar el número de años en *número de periodos.*

Ambas respuestas son fáciles de obtener. La tasa por semestre es 0.07/2 (porque hay 2 semestre en un año). El número de semestres que hay en 5 años es 10 (5 años * 2 semestres/año). Una vez que hemos transformado los datos originales del problema a datos *por periodo,* podemos aplicar la fórmula de interés compuesto derivada en el capítulo anterior. Los nuevos datos del problema son:

$$\begin{aligned}
V_0 &= 600 \\
i &= 0{,}07/2 = 0{,}035 \\
n &= 5 * 2 = 10 \\
V_6 &= V_0\ (1+i)^n \\
&= 600\ (1{,}035)^6 \\
&= 737{,}55
\end{aligned}$$

Ejemplo 2.2: El día de hoy deposito \$7,500 en una cuenta que paga el 18 % capitalizable mensualmente. Si retiro el dinero dentro de 2 años y medio, ¿cuánto habré acumulado? Misma estrategia. Para usar la fórmula

$$V_n = V_0\ (1+i)^n \tag{1.2}$$

debo transformar la tasa de interés y el plazo a tasa por mes y meses respectivamente. Un 18 % capitalizable mensualmente es equivalente a una tasa de $0.18/12 = 0.015 = 1.5\,\%$ por mes. Dos años y medio son iguales a 30 meses. Ahora todo está en las unidades correctas.

$$V_{30} = 7500\ (1 + 0{,}015)^{30} = 11723{,}10$$

Un comentario: No hay necesidad de complicar la fórmula 1.2 para tomar en cuenta diferentes periodos o frecuencia de capitalización. Todo lo que hay que mantener en mente a la hora de resolver un ejercicio es que hay que trabajar con la tasa de interés apropiada. Si la capitalización es mensual, la tasa debe ser mensual. Si es trimestral, la tasa debe ser trimestral. La n que aparece en la fórmula 1.2 se refiere al número de periodos.

2. Tasas Nominales y Tasas Efectivas

Es convención en mercados financieros reportar las tasas de interés como *tasas nominales*; es decir como tasas *anuales* con una capitalización predeterminada (semestral, trimestral, mensual, etc.). Ahora bien, no todas las tasas nominales fueron creadas iguales ante Dios. Algunas son mejores que otras como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.3: Quiero depositar \$1. Tengo dos ofertas de dos bancos distintos: el banco A me ofrece 8 % capitalizable semestralmente y el banco B me ofrece el mismo 8 % pero capitalizable trimestralmente. ¿Cuál es la mejor oferta?

La mejor manera de responder es verificar con qué banco tendré más plata después de un periodo x de tiempo, por ejemplo un año.

En el caso del banco A, después de un año tendré

$$1\ (1 + 0{,}04)^2 = 1{,}0816.$$

En el caso del banco B, después de un año tendré

$$1\ (1 + 0{,}02)^4 = 1{,}0824.$$

Resulta que, a pesar de ofrecer la misma tasa nominal, la oferta con la frecuencia de capitalización mayor (4 contra 2, trimestral contra semestral) es más atractiva. Las tasas de 8.16 % y 8.24 % que resultaron de este ejercicio se conocen como *tasas efectivas*.

La definición formal debe ser más fácil de digerir ahora. Noten que la tasa efectiva siempre se define con respecto a una tasa de interés nominal. La *tasa efectiva* es la tasa de interés capitalizable *anualmente* que es equivalente a una tasa de interés nominal capitalizable x veces por año. "Equivalente" es esta definición quiere decir que cuando son aplicadas a una suma o monto inicial resultan en la misma cantidad final.

El principal uso de las tasas efectivas es comparar instrumentos financieros con distintas tasas nominales y con distintas frecuencias de capitalización.

Ejemplo 2.4: Ustedes solicitan un préstamo en dos bancos diferentes. Las condiciones de los préstamos son idénticas excepto por las tasas de interés. El primer préstamo cobra 24.50 % capitalizable semestralmente. El segundo préstamo cobra 23.80 % capitalizable mensualmente. ¿Cuál es la mejor oferta? A simple vista no estamos seguros. Por un lado el primer préstamo tiene la tasa nominal más alta, pero tiene también la frecuencia de capitalización menor. Tendremos que calcular las tasas efectivas. La tasa efectiva del primer préstamo es 26 % porque

$$(1+0{,}245/2)^2 = 1{,}2600.$$

La tasa efectiva del segundo préstamo es 26.57 %

$$(1+0{,}238/12)^{12} = 1{,}2657.$$

Por lo tanto, como deudor prefiero el primer préstamo.

La relación entre la tasa nominal y su tasa efectiva correspondiente puede obtenerse usando la formula

$$(1+\frac{\text{tasa nominal}}{\text{p}})^{\text{p}} = (1+\text{tasa efectiva}) \tag{2.1}$$

donde p es la frecuencia de capitalización (número de capitalizaciones por año).

3. Pagos múltiples

Las matemáticas financieras como disciplina podrían describirse como una colección de trucos para establecer equivalencias entre distintas sumas de dinero disponibles en distintos puntos en el tiempo. Vuelvan al ejemplo 1.4 del capítulo anterior: Si la tasa de interés es 12 % anual, la suma \$7,599.5 disponible dentro de 2 años y la suma \$15,000 dentro de 8 años son equivalentes. Equivalencia no quiere decir que uno no tenga una preferencia definida sobre estas dos sumas. Yo puedo preferir una suma a la otra. Equivalencia significa que la *tecnología* financiera, me permite transformar una suma en otra. El minuto en que la tasa de interés cambia a 11 % o a 13 %, esta equivalencia se rompe. Por eso, cuando hablamos de equivalencia lo hacemos asumiendo un tasa de interés determinada.

Así como las fórmulas de valor presente y valor futuro nos permitían transformar un flujo individual en otro flujo individual disponible en una fecha distinta, las fórmulas en el resto de este capítulo y en los próximos capítulos nos permitirán transformar una serie de pagos en un solo flujo individual. Como siempre explicaremos estas ideas en el contexto de un ejemplo.

Ejemplo 2.5: Supongan que hemos firmado un contrato que nos obliga a pagar \$10,000 dentro de 3 años y \$15,000 más dentro de 8 años. Si quisiéramos liquidar esta deuda (ambos pagos) mediante un solo pago el día de hoy, ¿cuánto tendríamos que pagar? Asuma un tasa de interés del 9 %. La figura 1 representa nuestro problema.

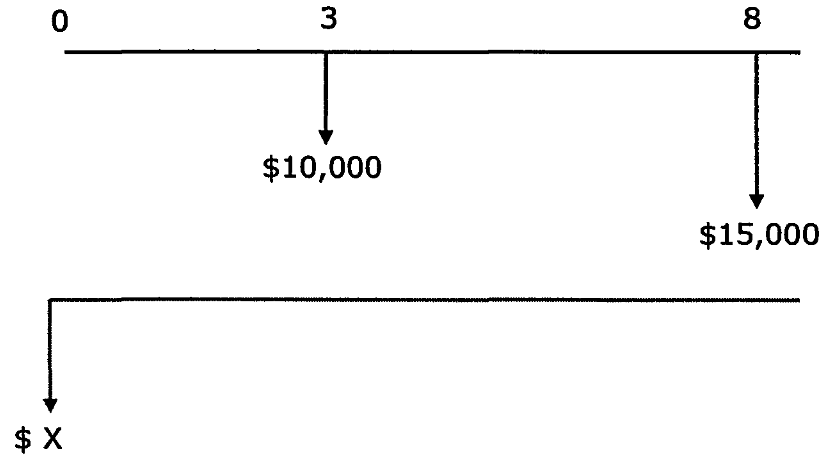

FIGURA 1. Equivalencia de pagos múltiples.

El dicho "Divide y Conquistarás" se aplica aquí. Yo no sé cuanto vale el día de hoy la combinación de $10,000 dentro de 3 años y $15,000 dentro de 8 años, pero con la ayuda de la fórmula de valor presente sé cual es el equivalente de $10,000 dentro de 3 años puestos en el día de hoy. Llamemos a este valor la parte A del problema:

$$V_A = \frac{10000}{(1{,}09)^3} = 7721{,}84$$

Sé también cuál es el equivalente de $15,000 dentro de 8 años puestos en el día de hoy. Llamemos a esta valor la parte B del problema:

$$V_B = \frac{15000}{(1{,}09)^8} = 7527{,}99.$$

La suma de las partes A y B constituye la respuesta a mi pregunta. Un pago individual de $15,249.83 es equivalente a un pago de $10,000 en 3 años y otro de $15,000 en 8 años. ¿Hay alguna manera de comprobar que esta es la respuesta correcta? Claro que si. Supongan que en lugar de liquidar la deuda el día de hoy, yo tomo los $15,249.82 y los deposito en una cuenta bancaria que paga el 9 %. Dentro de 3 años tendré $19,748.97 (¿de dónde salió este número?). Hago el primer pago de $10,000 y me quedan $9,748.97. Los dejo en el banco por otros 5 años ganando el 9 % de interés. Transcurridos esos 5 años tendré en el banco $15,000. Justo lo que necesito para cancelar el segundo pago. Esto es equivalencia.

Ejemplo 2.6: Consideren la siguiente variación. ¿Cuánto tendré que pagar si quiero liquidar la misma deuda del ejemplo 2.5. con un pago individual, ocurriendo este no hoy, sino dentro de un año. La figura 2 representa nuestro problema.

La solución no es muy diferente de la del ejemplo 2.6. Lo que quiero hacer es mover los $10,000 dos periodos antes (están en el periodo 3 y los necesito en el periodo 1) y los $15,000 moverlos siete periodos antes (están en el periodo 8 y los necesito en el periodo 1). De nuevo partamos el problema en partes A y B. La parte

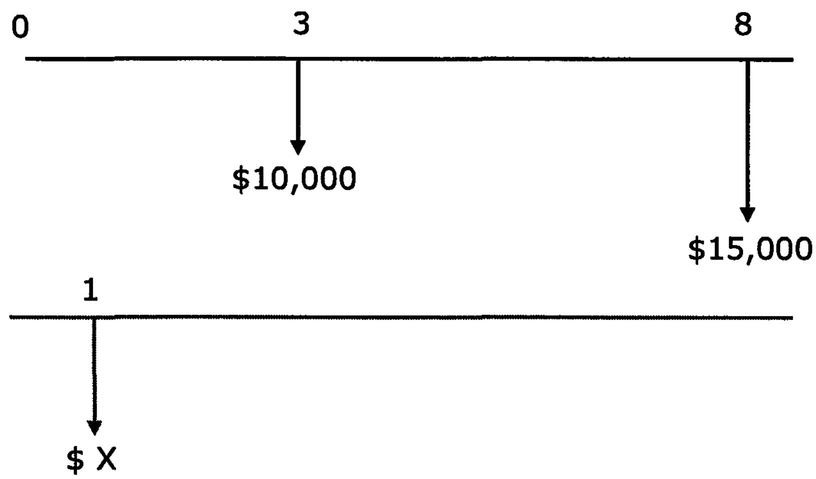

FIGURA 2

A es

$$V_A = \frac{10000}{(1{,}09)^2} = 8416{,}80$$

y la parte B es

$$V_B = \frac{15000}{(1{,}09)^7} = 8205{,}51$$

para un total de $16,622.31.

Ejemplo 2.7: Una variación más. ¿Cuánto tendré que pagar si quiero liquidar la misma deuda del ejemplo 2.5. con un pago individual, ocurriendo este no hoy, sino dentro de 5 años. ¿Cuál es su representación gráfica?

Ahora tengo que mover los $10,000 dos periodos hacia adelante (del periodo 3 al 5) y mover los $15,000 tres periodos hacia atrás (del 8 al 5). Para mover hacia adelante la primera parte, uso la fórmula de valor futuro

$$V_A = 10000\ (1{,}09)^2 = 11881$$

y para mover hacia atrás los $15,000 uso la fórmula de valor presente

$$V_B = \frac{15000}{(1{,}09)^3} = 11582{,}75.$$

La suma de ambos es $23,463.75.

Para cerrar este capítulo pensemos en las respuestas a los últimos tres ejercicios. ¿Hay alguna relación entre ellas? Ya lo creo. Si tomamos la respuesta al ejemplo 2.5, $15,249.83 (que estaba situada en el periodo 0) y lo movemos un periodo hacia adelante usando la tasa de interés de 9 % obtendremos... (ustedes lo adivinaron) $16,622.31, la respuesta al ejemplo 2.6. Si movemos esta cantidad 4 periodos más hacia adelante obtendremos $23,463.75, la respuesta al ejemplo 2.7. Esto no es coincidencia. No podría ser de otra forma.

CAPíTULO 3

Perpetuidades y Anualidades

El capítulo anterior cerró con una discusión del concepto de equivalencia entre flujos y con una explicación de cómo transformar un grupo de pagos en un solo pago que podía ser colocado en cualquier punto en el tiempo. En este capítulo impondremos un poco de estructura a este grupo de pagos. Requeriremos que los pagos sean por montos iguales y se hagan periódicamente (cada año, cada trimestre, cada mes, etc.). Discutiremos dos casos: el caso de las anualidades en el que el número de pagos es finito (e.g. el contrato termina en una fecha determinada) y el caso de las perpetuidades cuando el número de pagos es infinito. Aunque resulte un poco paradójico, el análisis, las fórmulas y las derivaciones son más sencillas para las perpetuidades. Por eso abrimos esta clase con ellas.

1. Perpetuidades

Una *perpetuidad o anualidad perpetua* es una promesa de pago de un monto fijo a intervalos fijos. Como su nombre lo indica, la perpetuidad no deja de pagar nunca. Por ejemplo, consideren un instrumento que paga \$5,000 cada año para siempre (desde el año entrante hasta el "fin de nuestros días").

Con lo que hemos aprendido hasta hoy podemos por lo menos plantear el problema y esperar que haya una fórmula matemática que nos permita simplificarlo. Llamemos P al precio de una perpetuidad, c al pago fijo que hace cada periodo, e i a la tasa por periodo. Entonces

$$\begin{aligned} P &= \frac{c}{(1+i)} + \frac{c}{(1+i)^2} + \frac{c}{(1+i)^3} + \dots \\ &= \frac{c}{1+i}\left[1 + (\frac{1}{1+i}) + (\frac{1}{1+i})^2 + ...\right] \end{aligned}$$

Chequeando cualquier libro de cálculo, podemos encontrar la siguiente fórmula para progresiones geométricas:

$$1 + a + a^2 + a^3 + \dots = \frac{1}{1-a}, \text{ siempre y cuando } |a| < 1.$$

El término entre corchetes está en la forma deseada con

$$a = \frac{1}{1+i}.$$

Noten que a es efectivamente menor que 1 porque la tasa de interés siempre es positiva. Por lo tanto, el término en corchetes en la fórmula para P es igual a

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}} = \frac{1}{\frac{1+i}{1+i} - \frac{1}{1+i}} = \frac{1}{\frac{i}{1+i}} = \frac{1+i}{i}$$

Por lo tanto

$$P = \frac{c}{1+i} * \frac{1+i}{i}$$

que simplificando nos queda en

$$P = \frac{c}{i} \tag{3.1}$$

Resulta que, aunque hay muy pocos instrumentos que puedan ser catalogados como perpetuidades[1], esta fórmula es de una gran utilidad para ayudarnos a obtener el valor actual de otros instrumentos como comprobaremos en la siguiente sección.

Ejemplo 3.1: Cuál es el valor de una perpetuidad que ofrece pagar \$5,000 anuales si la tasa de interés es igual a 10 %?

$$\begin{aligned} i &= 0{,}10 \\ c &= 5000 \\ P &= \frac{5000}{0{,}10} = 50000. \end{aligned}$$

Es instructivo pensar sobre por qué esta es la única respuesta posible. Inicialmente uno esta tentado a pensar que un instrumento que hace un número infinito de pagos debería valer una cantidad arbitrariamente grande de dinero. De hecho, uno tendría derecho a pensar que debería valer una cantidad infinita de dinero. Pero esto no es así. Los flujos en el futuro distante valen muy poco el día de hoy. De hecho valen menos y menos a medida que nos alejamos del presente.

Si alguien me da \$50,000 y la tasa de interés es 10 %, yo estoy *en capacidad* de hacer un número infinito de pagos de \$5,000 cada año. ¿Cómo? Pongo el dinero en el banco. Al cabo de un año, los \$50,000 se habrán convertido en \$55,000 (10 % de interés anual equivale a \$5,000 de intereses cada año). Puedo pagar los \$5,000 correspondientes al primer año y repetir el ciclo *ad infinitum*. ¿Qué ocurriría si tuviera menos de \$50,000, digamos \$49,000? Convénzanse (especialmente después de leer la sección siguiente sobre anualidades) que llegaría un momento en el que el dinero se me agotaría. ¿Qué ocurriría si tuviera más de \$50,000? Revirtiendo el argumento, podría hacer los pagos que demanda el instrumento y al mismo tiempo acumular una suma infinita de dinero.

Ejemplo 3.2: (Para que practiquemos un poco distintos periodos de capitalización.) Supongan que un instrumento paga \$850 *mensuales* (primer pago dentro de un mes exactamente) y la tasa de interés es 24 % capitalizable mensualmente. ¿Cuánto vale ese instrumento el día de hoy?

El periodo con que estamos trabajando ahora es un mes. Por lo tanto, la tasa de interés i que usemos debe ser una tasa por mes. Si la tasa anual es 24 %, la tasa mensual es 2 %. Entonces

$$\begin{aligned} i &= 0{,}02 \\ c &= 850 \\ P &= \frac{850}{0{,}02} = 42500. \end{aligned}$$

[1]El único que yo conozco son los *consols*, cierto tipo de bonos emitidos por el gobierno inglés.

2. Anualidades

Una anualidad es un instrumento que paga una suma fija de dinero a intervalos pre-especificados por *un período de tiempo definido.* Esta última parte es lo que la distingue de una perpetuidad (que nunca deja de hacer pagos). Ejemplos de anualidades abundan en mercados financieros. La mayor parte de los préstamos de largo plazo para comprar casas o carros se estructuran de esta manera. Los bonos que emiten los gobiernos o las compañías son la combinación de una anualidad y un pago final.

Si queremos conocer el valor de todos esos pagos *un periodo antes de que comiéncen* podemos escribir

$$A = \frac{c}{(1+i)} + \frac{c}{(1+i)^2} + \dots + \frac{c}{(1+i)^n}$$

Claramente, podemos encontrar este valor presente sumando los valores presentes de cada uno de los pagos (como lo hicimos al final del capítulo 2). Sin embargo, para valores de n altos esto se vuelve una pesadilla rápidamente. Noten, sin embargo, que el valor de la anualidad es igual al valor de una perpetuidad *menos* el valor actual de los pagos que la anualidad *no* hace. Por favor lean la oración anterior una vez más.

La perpetuidad hace pagos desde el período 1 hasta el "período" ∞. La anualidad hace pagos desde el período 1 hasta el período n. Por lo tanto si restamos del valor de la perpetuidad el valor presente de los pagos del período $n+1$ en adelante obtendremos el valor de la anualidad.

$$\begin{aligned} A &= P - \left[\frac{c}{(1+i)^{n+1}} + \frac{c}{(1+i)^{n+2}} + \dots\right] \\ &= P - \frac{1}{(1+i)^n}\left[\frac{c}{(1+i)} + \frac{c}{(1+i)^2} + \dots\right] \end{aligned}$$

Pero noten, el término en corchetes es el valor de otra perpetuidad! Por lo tanto,

$$\begin{aligned} A &= P - \frac{1}{(1+i)^n} * [P] \\ &= [1 - \frac{1}{(1+i)^n}] * P \end{aligned}$$

Finalmente, podemos expresar

$$A = [1 - \frac{1}{(1+i)^n}] * \frac{c}{i} \tag{3.2}$$

Ejemplo 3.4: ¿Cuál es valor actual de 4 pagos anuales de \$100 cuando la tasa de interés es 10 %? Aquí podemos aplicar la fórmula 3.2 directamente y obtener

$$P = \left[1 - \frac{1}{(1+0{,}1)^4}\right] * \frac{100}{0{,}1} = 316.99.$$

Sin embargo, quiero motivar la derivación de la fórmula 3.2 con un ejemplo numérico. Lo más fácil es ponerle precio a una perpetuidad que paga \$100 anuales comenzando el año que viene. La figura 1 grafica esta perpetuidad. Su precio es

$$P = \frac{100}{0{,}1} = 1,000.$$

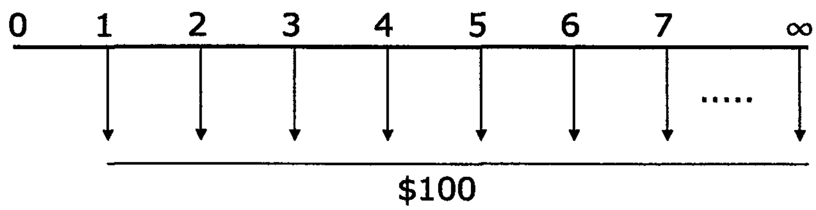

FIGURA 1. La perpetuidad.

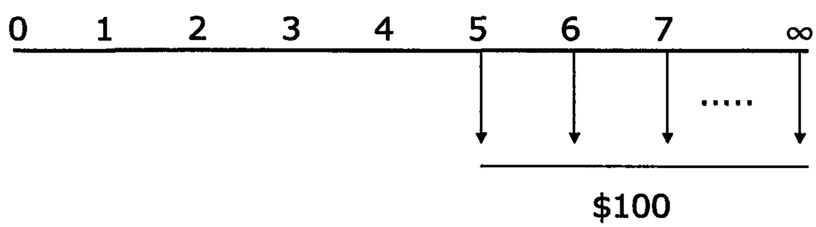

FIGURA 2. Los pagos que la anualidad no hace

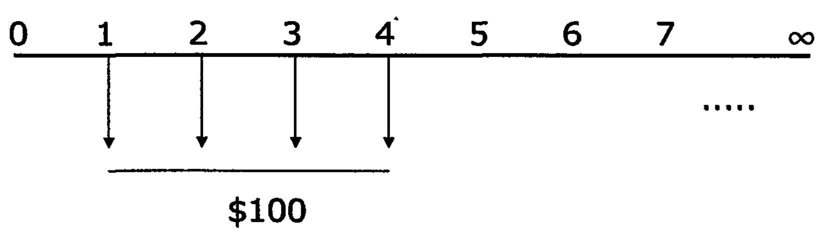

FIGURA 3. La anualidad

Nuestra anualidad sólo hace 4 pagos. Por lo tanto, queremos substraer los pagos que comienzan en el período 5. La figura 2 grafica estos pagos. *En el periodo 4*, todos estos pagos adicionales valen

$$\frac{100}{0{,}1} = 1,000.$$

Por lo tanto, *en el período 0* valen

$$\frac{1}{(1+0{,}1)^4} * \frac{100}{0{,}1} = 683{,}01.$$

Finalmente, la figura 3 grafica los pagos que hace la anualidad en la que estoy interesado. El valor presente de estos será

$$\begin{aligned} \frac{100}{0,1} - \frac{1}{(1+0,1)^4} * \frac{100}{0,1} &= \\ \frac{100}{0,1}[1 - \frac{1}{(1+0,1)^4}] &= \\ 1,000 - 683,01 &= 316,99. \end{aligned}$$

Hagamos ahora otro ejercicio usando un periodo de capitalización que no sea un año.

Ejemplo 3.5: ¿Cuánto pagarían por un instrumento financiero que ofrece pagar \$2,000 por semestre por 25 años si la tasa de interés es 12 %?

Estos son 50 pagos de \$2,000 cada uno con una tasa de interés semestral de 6 %. El valor un periodo antes de que comiéncen los pagos es

$$P = (1 - \frac{1}{1,06^{50}}) * \frac{2000}{0,06} = 31523,72$$

En el siguiente ejemplo nos interesa determinar el valor de una serie de pagos iguales un periodo antes de que comiencen, sino en el periodo en el que ocurre el último pago. Este valor se conoce en libros de matemáticas financieras como el *valor futuro de una anualidad.*

Ejemplo 3.6: Yo ahorro \$300 mensuales por 5 años. El banco paga una tasa de interés del 8 % capitalizable mensualmente. ¿Cuánto tendré al final del 5to. año?

Para resolver este ejercicio, primero traeremos todos los 60 pagos al período 0 usando la fórmula 3.2. Después usaremos la fórmula 1.2 para llevarlos al período 60.

El valor presente de esta serie de pagos es igual a

$$[1 - \frac{1}{(1+0,0067)^{60}}] * \frac{300}{0,0067} = 14,796.$$

El valor futuro de \$14,796 dentro de 60 meses a una tasa de interés del 0.67 % por mes es

$$14,796 * (1 + \frac{0,08}{12})^{60} = 22,044.$$

Ejemplo 3.7: Si mi salario actual me permite ahorrar mensualmente una suma igual a \$1,000, ¿cuánto tiempo debo trabajar para poder retirarme con una suma de dinero igual a \$1,000,000 si la tasa de interés es 15 % compuesta mensualmente?

Este ejercicio es semejante al anterior en planteamiento, pero esta vez estamos tras el número de periodos, no tras el valor futuro (que ya conocemos, un millón de dólares). Usando los mismos pasos, el valor presente de todos mis depósitos mensuales es

$$[1 - \frac{1}{1,0125^n}] * \frac{1000}{0,0125}.$$

Este es el valor en el período 0. Lo que me interesa es el valor en el período n. Este valor futuro es

$$1,0125^n * \left[1 - \frac{1}{1,0125^n}\right] * \frac{1000}{0,0125}$$

y debe ser igual a mi meta de \$1,000,000.

$$
\begin{aligned}
1000000 &= 1{,}0125^n * \left[1 - \frac{1}{1{,}0125^n}\right] * \frac{1000}{0{,}0125} \\
1000000 * \frac{0{,}0125}{1000} &= 1{,}0125^n * [1 - \frac{1}{1{,}0125^n}] \\
12{,}5 &= 1{,}0125^n - 1 \\
13{,}5 &= 1{,}0125^n \\
\ln(13{,}5) &= n * \ln(1{,}0125) \\
n &= \frac{\ln(13{,}5)}{\ln(1{,}0125)} = 209{,}50
\end{aligned}
$$

Recuerden que siempre trabajamos con periodos. La respuesta de 209.50 se refiere al número de meses. Me toma entonces 17.459 años alcanzar mi meta.

Ejemplo 3.8: Quiero comprar un carro por $18,000. Bancentro, un banco local, ofrece prestarme el 80 % de desembolso a una tasa de interés del 18 % capitalizable mensualmente. Si quiero pagar el carro en 2 años, ¿qué cuota fija debo pagar mensualmente?

Primero determinemos el monto del préstamo. Este es 80 % de $18,000 = $14,400. Este monto es el valor presente o actual de mis 24 pagos mensuales durante los próximos dos años. Mi incógnita es el monto del pago mensual.

$$
\begin{aligned}
14,400 &= [1 - \frac{1}{(1+0{,}015)^{24}}] * \frac{c}{0{,}015} \\
14,400 &= 0{,}30046 * \frac{c}{0{,}015} \\
c &= 718{,}9
\end{aligned}
$$

Noten que por los $14,400 que se me prestaron, termino pagando $17,253, igual a 718.9*24. La diferencia por supuesto es el monto de intereses pagados.

Ejemplo 3.9: Quiero comprar una casa por $75,000. Banexpo, otro banco local, me ofrece la siguiente hipoteca. Durante los próximos 25 años yo debo pagar mensualmente $800. ¿Qué tasa de interés nominal capitalizable mensualmente me está cobrando Banexpo?

$$
75000 = [1 - \frac{1}{(1+i)^{300}}] * \frac{800}{i}
$$

No hay manera de calcular la tasa de interés despejando la fórmula. Con una calculadora o con Excel es posible calcular que $i = 0{,}0101516$. Recuerden que esta es una tasa por mes. La tasa nominal capitalizable mensualmente se obtiene multiplicando la tasa mensual por 12 y es igual a 12.182 %.

CAPíTULO 4

Anualidades Anticipadas y Diferidas

En esta clase consideraremos dos pequeñas variaciones del caso de anualidades discutido en capítulo anterior. Mientras escribo este capítulo me pregunto si las anualidades anticipadas y diferidas realmente merecen una capítulo aparte de las anualidades *simples* discutidas atrás. Como verán no son nada diferente de ellas. Simplemente estamos preguntando su valor en un periodo diferente (no un periodo antes de que comiéncen como las anualidades simples).

1. Anualidades Anticipadas

Las anualidades *simples* están caracterizadas por una serie de pagos iguales ocurriendo a una frecuencia fija y *cuyo primer pago ocurre exactamente dentro de un periodo*. Nuestra primera variación, la anualidad anticipada, hace el primer pago el día de hoy. ¿Cómo le pongo precio el día de hoy a un instrumento de este tipo? Consideremos un ejemplo para hacer concreta la discusión.

Ejemplo 4.1: He firmado un contrato que me obliga a hacer 10 pagos iguales de \$8,000 cada uno el primero de los cuales debe hacerse el día de hoy y cada uno de los 9 restantes con un año de separación. ¿Qué suma el día de hoy liquidaría este contrato si la tasa de interés vigente es 7 %?

Hay dos maneras equivalentes de resolver este ejercicio. La primera es pensar en la anualidad anticipada como una anualidad simple de nueve pagos más un pago adicional el día de hoy. El valor presente de los 9 pagos (el primero ocurriendo dentro de un periodo exactamente) está dado por

$$\frac{8000}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{(1{,}07)^{9}}\right)=52121{,}85.$$

A esto simplemente le sumo el valor del primer pago de \$8,000 para obtener 60,121.85. Ese es el valor presente de la anualidad anticipada.

La segunda manera de resolver este ejercicio es más instructiva. Si yo le aplico la fórmula de la anualidad a los 10 pagos de \$8,000, lo que hace esta fórmula es transformarlos en un solo monto de dinero colocado *un periodo antes del primer pago*.

$$\frac{8000}{0{,}07}\left(1-\frac{1}{(1{,}07)^{10}}\right)=56188{,}65.$$

Estos \$56,188.65 están ubicados un periodo atrás de donde yo los necesito. Para moverlos un periodo hacia adelante uso la fórmula de valor futuro

$$56188{,}65(1{,}07)=60121{,}85.$$

Ejemplo 4.2 Hoy es 1 de enero del 2002. Hoy decido abrir una cuenta de banco con un depósito de \$400 que repetiré al comienzo de cada trimestre por 24 trimestres consecutivos (incluyendo mi deposito inicial). ¿Cuánto habré acumulado en esa cuenta el día que hago el último deposito? La tasa de interés es 12 % capitalizable trimestralmente.

Si pongo los 24 depósitos en el presente (primero el que ya está en el presente y después los 23 restantes) tendré

$$400 + \frac{400}{0{,}03}(1 - \frac{1}{(1+0{,}03)^{23}}) = 6977{,}44$$

Ahora debo llevar esta suma al periodo 23

$$6977{,}44\ (1+0{,}03)^{23} = 13770{,}58.$$

Noten que este también es el valor futuro de una anualidad simple. Convénzanse. La diferencia es dónde están estos $13,770.58. En el caso de la anualidad simple están en el periodo 24. En el de la anualidad anticipada están en el periodo 23.

Con gran malestar e incomodidad les ofrezco una fórmula para el valor presente de una anualidad anticipada que hace n pagos el primero de los cuales ocurre el día de hoy.

$$\begin{aligned} A_a &= c + \frac{c}{i}[1 - \frac{1}{(1+i)^{n-1}}] \\ &= \frac{c}{i}[1 - \frac{1}{(1+i)^{n}}](1+i) \end{aligned} \tag{4.1}$$

Noten el *n-1* en la fórmula en la primera línea..

2. Anualidades Diferidas

Nuestra segunda variación consiste en posponer o *diferir* el primer pago de un anualidad por lo menos 2 periodos. Es decir, el primer pago no ocurre dentro de un periodo como la anualidad simple, sino dentro de 2, 3, 4... k periodos. Ejemplo por favor.

Ejemplo 4.3: El día de hoy contraje una deuda con un periodo de gracia de 3 años. Dentro de 4 años exactamente comenzaré a pagar $17,000 por año durante 5 años. La tasa de interés es 4 %.

La manera de solucionar este problema es situarnos inicialmente en el año 3 (...un periodo antes de que comiéncen los pagos). Vista desde el periodo 3 esta es una anualidad común y corriente con valor *en el periodo 3*

$$\frac{17000}{0{,}04}(1 - \frac{1}{(1{,}04)^5}) = 75680{,}97$$

Este paso está representado en la figura 1. Ahora llevo este monto que esta sentado en el periodo 3 al periodo 0 que es donde lo necesito.

$$\frac{75680{,}97}{(1{,}04)^3} = 67280{,}11.$$

Este paso está representado en la figura 2.

Una pregunta que recibo año tras año sobre problemas de este tipo es ¿por qué se pagan intereses durante los primeros 3 años si este era un periodo de gracia? La respuesta es que periodo de gracia significa que no hay pagos en ese periodo. No significa que no se cobren y acumulen intereses. Si fuera así se llamaría periodo de regalo. Y no hay muchos de esos en la vida real.

Ejemplo 4.4: Para venir a estudiar a INCAE, un estudiante tomó un préstamo por $20,000 en los siguientes términos. La tasa de interés aplicable al préstamo es

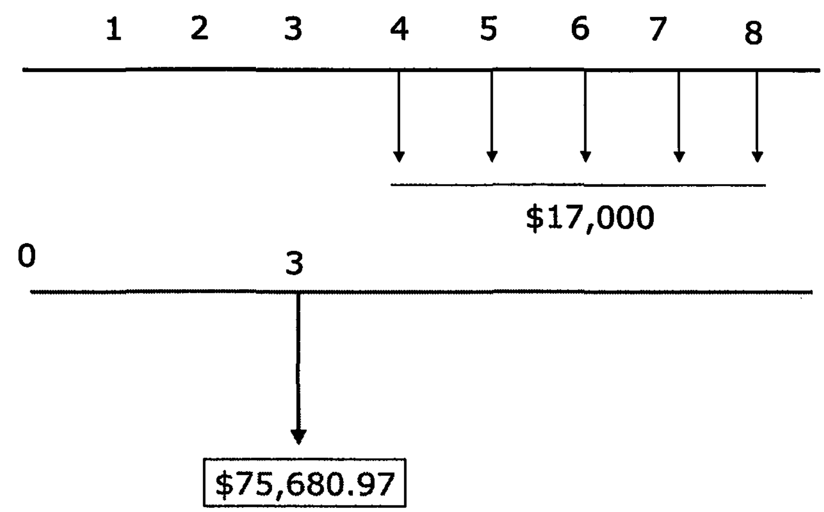

FIGURA 1. Trabajando con anualidades diferidas.

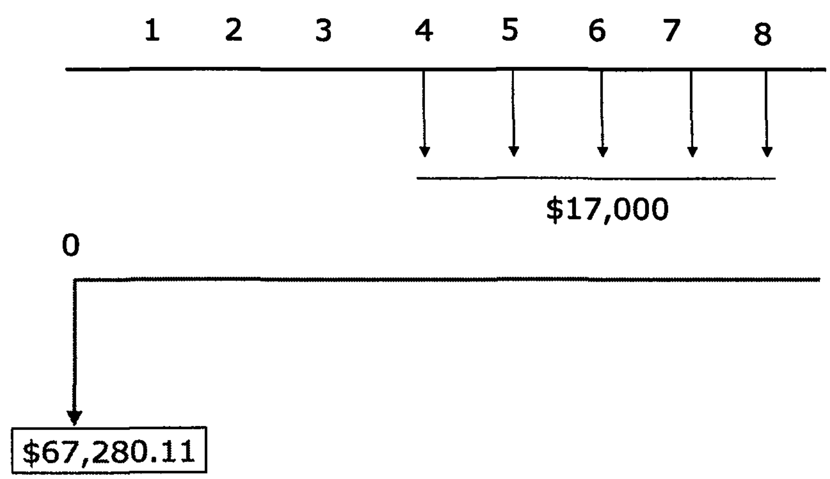

FIGURA 2. Trabajando con anualidades diferidas.

16 % capitalizable mensualmente. El estudiante recibirá el dinero del día de hoy (periodo 0) y los pagará en cuotas mensuales iguales durante 5 años. El primer pago no ocurrirá hasta un año después de que el estudiante salga del INCAE (para evitar ambiguedades el primer pago ocurre exactamente en el mes 37). ¿Cuál será la cuota mensual?

En el periodo 36 (un periodo antes de que comiencen los pagos), el valor de los 60 pagos iguales será

$$\frac{C}{0{,}0133}[1 - \frac{1}{(1+0{,}0133)^{60}}].$$

Por lo tanto, el valor en el periodo 0 será

$$\frac{1}{(1{,}0133)^{36}}\frac{C}{0{,}0133}[1-\frac{1}{(1+0{,}0133)^{60}}]$$

que tiene que ser igual a los \$20,000 del préstamo. Al resolver esa ecuación para C obtenemos $C = 783{,}51$.

Con igual malestar e incomodidad les ofrezco una fórmula para el valor presente de una anualidad diferida que hace n pagos el primero de los cuales ocurre dentro de $k+1$ periodos.

$$A_d = \frac{1}{(1+i)^k}\ \frac{c}{i}\ [1-\frac{1}{(1+i)^n}] \tag{4.2}$$

En el ejemplo 4.3, el valor de k era 3 porque el primer pago ocurría dentro de $k+1=4$ periodos.

Eso es todo lo que tengo que decir sobre anualidades diferidas y anticipadas. Si prefieren, como yo, ignorar por completo las fórmulas 4.1 y 4.2 y reconstruirlas cuando las necesiten me harán muy feliz.

CAPÍTULO 5

Extensiones y Aplicaciones

Hemos desarrollado en las primeras cuatro clases toda la teoría que necesitamos para establecer equivalencias entre series de flujos. Esto resultará de gran utilidad para ustedes en cursos futuros donde tengan que poner precios a grupos de flujos una y otra vez. Comenzaremos este capítulo con una extensión simple de la idea desarrollada al final de capítulo 2. Cerraremos el capítulo con una discusión rápida de los bonos. Como verán entonces, los bonos son una combinación de una anualidad común y corriente y un pago final.

1. Extensiones

Esta sección esta basada por entero en ejemplos.

Ejemplo 4.1: Supongan que tenemos que hacer 12 pagos trimestrales de \$1,000 cada uno comenzando el próximo trimestre y otros 12 pagos trimestrales de \$1,500 comenzando en el trimestre 13. La tasa de interés es 16 % capitalizable trimestralmente.

Hay dos maneras de ver este ejercicio. Primero, como dos anualidades de 12 pagos cada una donde la segunda anualidad es diferida. Segundo, como dos anualidades: una de 24 pagos de \$1,000 y otra de 12 pagos de \$500, diferida.

$$\frac{1000}{0{,}04}(1-\frac{1}{(1{,}04)^{12}})+\frac{1}{(1{,}04)^{12}}\frac{1500}{0{,}04}(1-\frac{1}{(1{,}04)^{12}})=18178$$

Ejemplo 4.2: Este fue un ejercicio en un examen final en años pasados. Hoy es 1 de enero del 2002. Comenzando a finales de mes, Joaquín depositará \$200 cada mes por un periodo de 5 años. La única dificultad de este ejercicio es que los depósitos en diciembre (debido al aguinaldo y otros bonos) son de \$500. ¿Cuánto tendrá Joaquín al cabo de 5 años? La tasa de interés es 6 % capitalizable mensualmente.

De no ser por la complicación de los pagos mayores en diciembre, la solución sería el valor futuro de una anualidad común y corriente. El ejercicio anterior, sin embargo, no da la clave para resolverlo. Que tal si los depósitos fueran todos iguales a \$200. ¿Cuánto tendría Joaquín?

$$\frac{200}{0{,}005}(1-\frac{1}{(1{,}005)^{60}})(1{,}005)^{60}=13954$$

¿Qué le falta a esta solución para ser la solución al problema original? Bueno, omitimos parte de los 5 depósitos de diciembre. Nos comimos \$300 cada uno de los 5 diciembres. ¿Cuál es el valor futuro de estos 5 pagos *anuales*?

Primero debo hallar la *tasa anual* con la que voy a trabajar. Resulta que lo que andamos buscando es la tasa efectiva equivalente a una nominal de 6 % cap.

mensualmente.

$$\begin{aligned}(1{,}005)^{12} &= 1 + efectiva \\ 0{,}0616 &= efectiva\end{aligned}$$

Ahora llevemos a valor futuro los 5 pagos de \$300 usando la tasa de 6.16 %

$$\frac{300}{0{,}0616}(1 - \frac{1}{(1{,}0616)^5})(1{,}0616)^5 = 1696{,}5$$

que sumados a los 13954 nos dan la respuesta deseada.

Ejemplo 4.3: Este ejercicio es más sencillo que el anterior, pero no da una introducción casi perfecta al tópico de los bonos. Supongamos que tengo que hacer 12 pagos semestrales de \$70 comenzando el próximo semestre y un pago de \$1000 en el semestre 15. Si la tasa es 12 % capitalizable semestralmente, ¿qué cantidad única el día de hoy liquida esta deuda? Este contrato es una combinación de un pago individual de \$1000 y una anualidad de \$70 mensuales. Traídos a valor presente tenemos

$$\frac{70}{0{,}06}(1 - \frac{1}{(1{,}06)^{12}}) + \frac{1000}{(1{,}06)^{15}} = 1004{,}1$$

2. Bonos

Los bonos son, como el ejercicio anterior, una combinación de un pago final llamado *principal* o *valor facial* (por lo general por \$100 o \$1000) y una serie de pagos periódicos llamados *cupones*. La única peculiaridad es que el principal se paga junto con el último cupón.

Ejemplo 4.4: Consideren un bono de 5 años con cupones semestrales de \$4 cada uno y un valor facial de \$100. Si la tasa de interés es 9 % capitalizable semestralmente, ¿cuál es el precio de ese bono? El precio es el valor presente de todos los pagos que hace el bono.

$$\frac{4}{0{,}045}(1 - \frac{1}{(1{,}045)^{10}}) + \frac{100}{(1{,}045)^{10}} = 96{,}04$$

¿Cuánto vale el bono el próximo semestre *después* de hacer su primer pago? Ahora quedan 9 cupones y el pago de \$100 dentro de 9 meses.

$$\frac{4}{0{,}045}(1 - \frac{1}{(1{,}045)^{9}}) + \frac{100}{(1{,}045)^{9}} = 96{,}36$$

¿Cuánto vale el bono dentro de dos semestres *después* de hacer su segundo pago? Ahora quedan 8 cupones y el pago de \$100 dentro de 8 meses?

$$\frac{4}{0{,}045}(1 - \frac{1}{(1{,}045)^{8}}) + \frac{100}{(1{,}045)^{8}} = 96{,}70$$

La figura 1 muestra esta relación. A medida que pasa el tiempo el bono va ganando valor. Este no es siempre el caso. A veces, el bono va perdiendo valor. A veces se mantiene constante. Uno de los ejercicios asignados al final de la clase de hoy les pedirá que estudien esta relación para otros dos casos posibles.

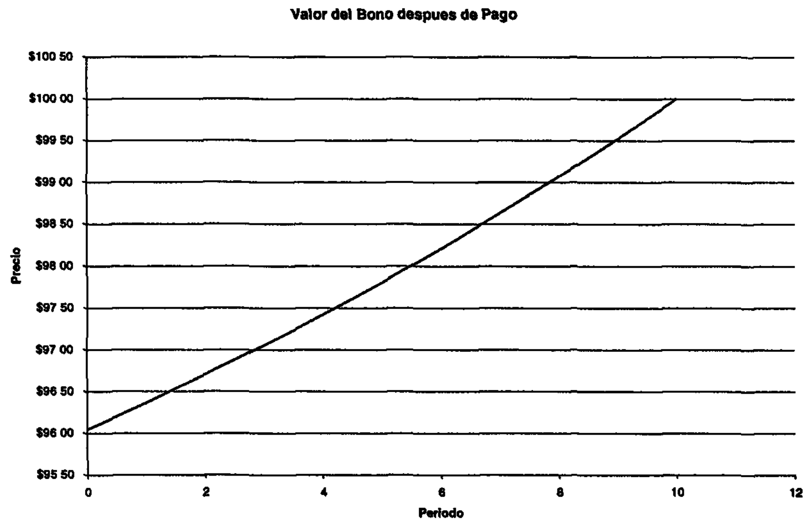

FIGURA 1. Precio del Bono como Función del Tiempo.

2.1. La relación entre la tasa de interés y el precio del bono. Esta sección aclara un pequeño misterio. Supongan que tengo dos bonos A y B diseñados de manera idéntica: pagan el mismo cupón cada semestre, el mismo valor facial, y hacen el mismo número de pagos. El bono A rinde 4 % (la tasa de interés asociada con él es 4 %) y el bono B rinde 5 %. ¿Por qué bono estoy dispuesto a pagar más? La respuesta (el bono que rinde más, el bono B), casi obvia, es incorrecta.

El principio que debemos recordar en esta sección es que hay una relación inversa entre el precio de un bono y la tasa de interés. Pero, ¿por qué? Analicemos un bono sencillo que ofrece pagar $100 dentro de 1 año y que no hace pago de cupones. Si la tasa de interés es 9 % ese bono el día de hoy vale $91.74. Si la tasa de interés sube a 12 %, con un pago fijo de $100 al final, la única manera de hacer que ese bono rinda más es que su precio caiga por debajo del 91.74 (que me garantizaba un rendimiento de 9 %). Efectivamente el precio del bono cae a $89.28. El mismo principio se aplica a bonos que pagan cupones. Si los pagos están predeterminados, la única variable que puede cambiar para variar el precio (en respuesta a un cambio en la tasa de interés) es el precio.

CAPÍTULO 6

Gradientes Geométricos

Este es el último tema que discutiremos de matemáticas financieras. El capítulo próximo es una aplicación de todos los capítulos anteriores, incluyendo este, a las finanzas personales. En mi afán por hacer la exposición de este material tan simple como se pueda, he descubierto que los gradientes geométricos no son otra cosa que perpetuidades y anualidades comunes y corrientes con una *tasa de interés ajustada por crecimiento*. Las derivaciones, como lo fueron en el caso de las perpetuidades y anualidades podrán ser un poco intimidantes al principio pero terminan reduciéndose a fórmulas sencillas y muy parecidas a las que ya derivamos.

1. El Caso Infinito

Consideremos el caso infinito inicialmente y después las fórmulas para el caso finito se deducirán solas. Consideremos un instrumento que nos paga comenzando el próximo periodo una cantidad c de dinero. En el segundo periodo, nos paga $c(1+g)$ donde g es la tasa de crecimiento de los pagos. En el tercer periodo nos paga $c(1+g)^2$ y así sucesivamente. Los pagos están creciendo geométricamente. Si la tasa de interés vigente es i, ¿cuánto debemos pagar por el instrumento el día de hoy? Usemos el mismo truco que usamos con las perpetuidades. Traigamos todo al periodo 0 y crucemos los dedos que haya una simplificación.

$$
\begin{aligned}
G_\infty &= \frac{c}{(1+i)} + \frac{c(1+g)}{(1+i)^2} + \frac{c(1+g)^2}{(1+i)^3} + \ldots \\
&= \frac{c}{(1+i)}[1 + \frac{(1+g)}{(1+i)} + \frac{(1+g)^2}{(1+i)^2} + \ldots]
\end{aligned}
$$

El término en corchetes se parece a la serie geométrica $1 + a + a^2 + a^3 + \ldots$ que tiene por suma $\frac{1}{1-a}$, pero ahora el término

$$a = \frac{1+g}{1+i}$$

Para que este término sea menor que 1 en valor absoluto necesitamos que $g < i$ (que los pagos no crezcan más rápido que la tasa de interés. ¿Qué creen que ocurriría si esta condición no se satisface?). Si asumimos que este es el caso

$$G_\infty = \frac{c}{(1+i)} \frac{1}{1 - \frac{1+g}{1+i}}$$

que después de mucha carpintería se reduce a

$$G_\infty = \frac{c}{i-g} \tag{6.1}$$

Por favor comparen esta fórmula con la fórmula de la perpetuidad, fórmula 3.1. Son idénticas, excepto por la tasa de interés que se utiliza en el denominador. En el caso de las perpetuidades, la tasa es i simplemente. En el de los gradientes geométricos es $i - g$. En ese sentido es que afirmo que el gradiente geométrico infinito es una perpetuidad con una tasa de interés *ajustada por crecimiento*. El crecimiento del pago en el gradiente tiene exactamente el mismo efecto que una reducción en la tasa de interés.

Una vez que hemos derivado esta fórmula su aplicación no debe causar mayor dificultad como ilustra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.1: Un instrumento ofrece hacer pagos periódicos, el primero de los cuales ocurre dentro de un año y es de un monto de $200. Los pagos a partir del periodo 2 crecen a una tasa de 5 %. Es decir, el segundo pago es de $210, el tercero de $220.5, y así sucesiva e infinitamente. Si la tasa de interés es del 7 %, ¿cuánto pagarían por uno de esos instrumentos el día de hoy?

Identifiquemos términos

$$\begin{aligned} c &= 200 \\ i &= 0{,}07 \\ g &= 0{,}05. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$G_\infty = \frac{200}{0{,}07 - 0{,}05} = 10000.$$

Comparen esa respuesta con la respuesta al siguiente ejemplo que les dejo como ejercicio.

Ejemplo 6.2 Un instrumento ofrece hacer pagos periódicos e iguales todos ellos a $200. Si la tasa de interés es 2 %, ¿cuánto pagarían por esa perpetuidad?

2. El Caso Finito

La fórmula para el caso finito no la derivaré formalmente. Se las doy directamente aquí[1].

$$G = \frac{c}{i-g}[1 - (\frac{1+g}{1+i})^n] \tag{6.2}$$

Esta es la fórmula *oficial.* Sería muy conveniente, para poder continuar mi analogía entre anualidades y gradientes que esta fórmula 6.2 pudiera re-escribirse como

$$G = \frac{c}{i-g}[1 - (\frac{1}{1+i-g})^n].$$

Entonces diríamos que la fórmula del gradiente finito es igual al de la anualidad con una tasa de interés ajustada por crecimiento $i - g$. Desafortunadamente este no es el caso *exactamente.* Sin embargo, para tasas de interés y tasas de crecimiento moderadas, esta segunda fórmula ofrece una excelente aproximación. La ventaja de esta aproximación es que nos deja apreciar que es (aproximadamente) lo que hace el crecimiento de los pagos. Este crecimiento *desinfla* o ajusta hacia abajo la tasa de interés.

[1]Nota completamente prescindible: Su derivación para aquellos inclinados a las derivaciones matemáticas sigue la misma ruta que usamos cuando derivamos la fórmula de las anualidades a partir de la de las perpetuidades. Podemos escribir el valor presente del gradiente finito como el valor presente del gradiente infinito *menos* el valor presente de los pagos que el gradiente finito no hace

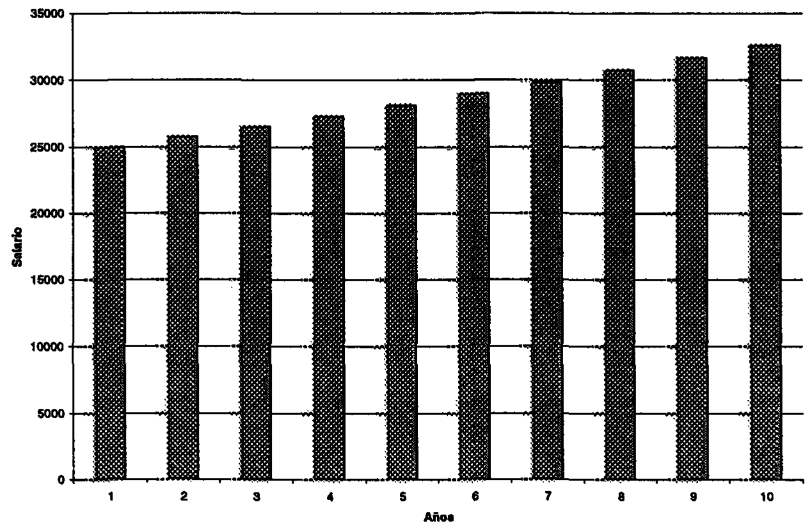

FIGURA 1. Evolución del Salario. Salario Inicial = \$25,000. Tasa de Crecimiento = 3 %.

Ejemplo 6.3: Una persona recibe un contrato de trabajo por 10 años. El contrato contempla 10 pagos anuales, el primero dentro de un año exactamente e igual a \$25,000. La tasa de crecimiento del salario es 3 % anual. La figura 1 muestra la evolución del salario. Si la tasa de interés es 9 %, ¿a qué suma disponible el día de hoy es equivalente ese contrato?

Aplicando la fórmula directamente

$$G = \frac{25000}{0{,}09 - 0{,}03}\left(1 - \left(\frac{1 + 0{,}03}{1 + 0{,}09}\right)^{10}\right) = 180131{,}30$$

Aunque no tiene sentido utilizar la fórmula 6.1 para casos en los que $g > i$[2], la fórmula 6.2 todavía nos da la respuesta correcta como ilustra el siguiente ejercicio.

Ejemplo 6.4: Suponga que en el ejemplo anterior el salario crece a una tasa del 12 % anual. ¿a qué suma disponible el día de hoy es equivalente ese contrato?

$$G = \frac{25000}{0{,}09 - 0{,}12}\left(1 - \left(\frac{1 + 0{,}12}{1 + 0{,}09}\right)^{10}\right) = 259953{,}20$$

Como ejercicio adicional verifiquen en Excel, las respuestas a los ejemplos 6.3 y 6.4 en este capítulo.

[2]El problema es que si la suma es infinita y los pagos están creciendo a una tasa mayor que la tasa de interés no hay esperanza de que la suma infinita converja.

CAPÍTULO 7

Matemáticas Financieras y las Finanzas Personales

La primera vez que enseñé este curso en 1999 me di cuenta de que la mayor parte de los ejercicios que inventaba para esta clase provenían directamente de problemas en mi propia vida: la compra de una carro, la compra de una casa, la liquidación de una deuda de estudiante, el manejo de una tarjeta de crédito, los planes de ahorro y de retiro, etc. Las matemáticas financieras nos proveen los instrumentos para analizar la mayoría de estas decisiones. Algunas de ellas ya las hemos analizado en los primeros capítulos. He dejado a manera de cierre para esta parte del curso, una decisión financiera fundamental que enfrenta todo individuo: ahorrar para el retiro. La lección más importante que podemos deducir de este capítulo es que uno puede diseñar un plan de retiro que le permita vivir holgadamente la última parte de su vida sin perder un ojo de la cara durante los años de trabajo, *siempre y cuando se comience a ahorrar temprano.* El/la que piense "Ni siquiera he comenzado a trabajar, por qué pensar en retiro" está cometiendo un grave error. Este es el momento preciso para diseñar un plan de ahorro para el retiro—cuando tienen mucho tiempo por delante. Disciplina es todo lo que se necesita.

1. Ahorrando para el Retiro

Comenzaremos con el caso más sencillo e iremos haciéndolo más y más realista, más y más complicado.

Ejemplo 7.1: Al salir del INCAE tendré 30 años (consideremos esto como el periodo 0). Pienso retirarme a los 65 años (periodo 35) y vivir hasta los 85 (periodo 55). Si quiero disfrutar de una renta de $24,000 por año cuando me retire, ¿cuánto debo ahorrar anualmente durante mis años de trabajo? La tasa de interés es 8 %.

El plan de ataque es el siguiente:

- hallar el valor presente de los 20 pagos de $24,000 en el periodo 35, un periodo antes de que comiencen los pagos
- convertir este valor en una meta de ahorro durante nuestros años de trabajo, y
- hallar el valor de C que hace que la anualidad de 35 depósitos tenga un valor futuro igual a la meta de ahorro.

El valor de los 20 pagos de $24,000 un año antes de que estos comiencen es

$$\frac{24000}{0{,}08} * (1 - \frac{1}{(1+0{,}08)^{20}}) = 235635{,}53$$

Esta es la suma de dinero que debe estar en mi cuenta de banco el último año de trabajo. A partir del año siguiente, financiaré mi consumo haciendo retiros de esta cuenta. Noten que los intereses el primer año de retiro (235,635.53*0.08=$18,850) no serán suficientes para cubrir la anualidad de $24,000. El principal se va gastando de tal manera que, en el año 55—cuando tengamos 85 años—sólo nos quedará en el banco $24,000. Nos los comemos durante ese año. Y después nos morimos.

El valor actual de los 35 depósitos de $C en el periodo 0 es

$$\frac{C}{0{,}08} * (1 - \frac{1}{(1+0{,}08)^{35}})$$
$$= 11{,}654 * C$$

El valor futuro (dentro de 35 periodos) de esta suma es

$$(1{,}08)^{35}(11{,}654 * C)$$
$$= 172{,}30 * C$$

Igualando ambas expresiones obtenemos:

$$235635{,}53 = 172{,}30\ C$$
$$C = 1{,}367{,}52$$

Increíble, no es así? $1,367.52 de ahorro anual me permiten disfrutar de una renta de $24,000 anual durante 20 años de retiro.

El ejemplo anterior ilustra el poder del interés compuesto y la importancia de comenzar a ahorrar temprano. Sin embargo, tiene un problema: la cifra de $24,000 es arbitraria; nos la sacamos de la manga. $1,367.52 pueden ser nada para un individuo o pueden ser una cifra exorbitante. Hay que diseñar el plan de retiro caso por caso de acuerdo a las perspectivas salariales de cada individuo. Más tarde en este programa de maestría se darán cuenta que también es necesario diseñarlo de acuerdo a las actitudes del individuo hacia el riesgo. Esto influye en la tasa de interés que usemos para acumular los ahorros.

El siguiente ejemplo (más realista) ilustra dos principios importantes:

- El plan de ahorro para el retiro debe reflejar las restricciones presupuestarias de cada individuo. El valor presente de mi consumo durante el resto de mi vida (que cubre periodos de trabajo y retiro) debe ser igual al valor presente de mis ingresos (salario principalmente, pero pueden incluir otros factores aquí como herencias, seguridad social, etc).
- Los individuos prefieren perfiles de consumo estables. A los individuos no les gustan los planes de consumo con grandes altibajos (el más importante de todos es la baja al momento del retiro si no han planificado adecuadamente).[1]

Ejemplo 7.2: Pedro acaba de terminar sus estudios de post-grado y ha conseguido un trabajo que le pagará $30,000 por año. Asuman que Pedro tiene 30 años y trabajará con esta compañía por 30 años. Asuman también que Pedro vivirá hasta los 90 años. Para ajustar el ejemplo a nuestras fórmulas, el primer pago de $30,000 se recibe dentro de un año. Si la tasa de interés es 8 %, ¿cuál es el monto de consumo anual *máximo* que Pedro puede permitirse *todos los años* de su vida?

[1]A los economistas entre ustedes les puedo hablar en un lenguaje más tecnico. Asumimos en Economía que los individuos tienen funciones de utilidad o felicidad concavas que penalizan los movimientos bruscos en consumo. Los individuos son optimizadores y por lo tanto evitarán esos movimientos bruscos Ahorraré hoy para que cuando no tenga ingreso pueda permitirme el mismo nivel de vida de hoy.

El valor presente de sus salarios debe ser igual al valor presente de sus gastos de consumo. Estamos comparando dos anualidades simples: una de 30 años (la del salario) y una de 60 años (la del consumo):

$$\begin{aligned} \frac{30000}{0{,}08}(1-\frac{1}{(1{,}08)^{30}}) &= \frac{c}{0{,}08}(1-\frac{1}{1{,}08^{60}}) \\ c &= 27288{,}2 \end{aligned}$$

Alguien por favor acompáñeme en mi asombro. Ahorrando una fracción menor que 10 % de mi salario (0.0904) puedo garantizarme el mismo nivel de vida por el resto de mis días trabajando solamente la mitad de ese tiempo. Mucha gente piensa que esto sólo es posible con tasas de interés altísimas. Pamplinas. El principal factor que les permitirá retirarse holgadamente es qué tan temprano comienzan a ahorrar, qué tan largo es el periodo de ahorro. Noten además que este no es realmente un plan de retiro, es un plan de consumo para el resto de mi vida. Por eso es que deben de empezar a pensar en el ahora.

En un ejercicio les pido que vuelvan a resolver este ejemplo pero con 5 años de ahorro. Es decir, Pedro se pasa los primeros 25 años de su vida como trabajador comiéndose por completo sus $30,000 y faltando 5 años antes de su retiro se acuerda que también le gustará consumir cuando se retire. Me gustaría decirles que este ejercicio refleja una exageración de mi parte. Desafortunadamente, es la regla más que la excepción. El nivel de sofisticación financiera del público en general es bastante baja. Si toman algo de mi curso que sea esta idea: Es muy bonito consumir el máximo el día de hoy y no ahorrar nada, pero piensen que estarán vivos dentro de 30 años y que también es bonito consumir cuando uno se retira y no tiene salario.

Es interesante seguir la evolución de la cuenta de banco de Pedro a través de su vida. Noten que durante los primeros años, Pedro contribuye religiosamente $2,711.8 y su saldo crece sostenidamente. A partir del año 31, Pedro se retira, deja de hacer contribuciones, y empieza a comerse sus ahorros $27,288.2 por año. La figura 1 muestra la evolución de su saldo en el banco. Tiene un punto máximo en el último año de trabajo y después empieza a descender.

Continuemos complicándonos la vida y haciendo el ejemplo más realista. Démosle a Pedro un comienzo más modesto, pero al mismo tiempo, démosle las perspectivas de que su salario crezca un poco cada año.

Ejemplo 7.3: Mismo escenario anterior, pero ahora Pedro comienza ganando $25,000 y su salario crece 1 % cada año. Bueno, por algo incluí gradientes geométricos este año. Estamos comparando un gradiente de 30 años de salarios con una anualidad simple de 60 años de consumo.

$$\begin{aligned} \frac{25000}{0{,}08-0{,}01}(1-(\frac{1{,}01}{1{,}08})^{30}) &= \frac{c}{0{,}08}(1-\frac{1}{1{,}08^{60}}) \\ c &= 24991. \end{aligned}$$

Noten que en este caso el ahorro durante los primeros años es bastante pequeño. El primer año es $9 (Salario $25,000-Consumo $24,991), el segundo año es es $259 ($25,000*1.01-$24,991), y así sucesivamente hasta llegar a ser $8,371 el año antes del retiro ($25,000*1.01^{29}-$24,991).

Hay una posibilidad que les pido explorar en un ejercicio: Si la tasa de crecimiento de mi salario es lo suficientemente alta, es posible que mi nivel de consumo el primer año sea mayor que mi salario. ¿Cómo cubriríamos ese exceso de consumo?

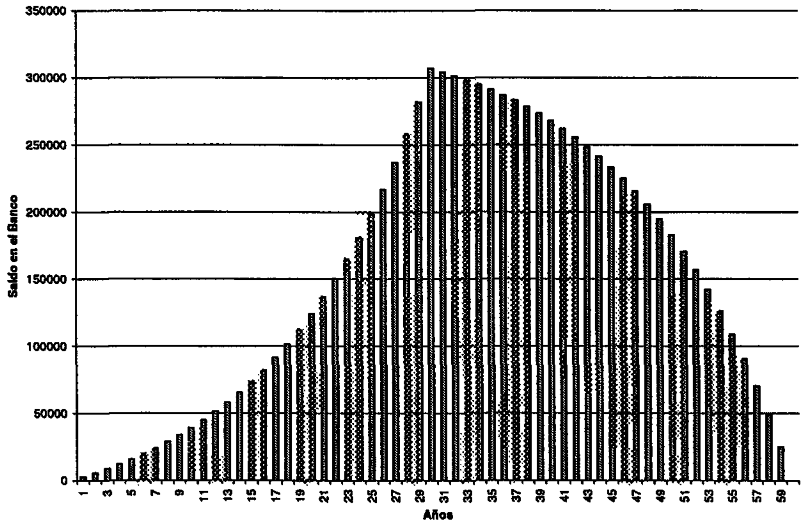

FIGURA 1. Evolución del Saldo en el Banco para Ejemplo 7.2.

Una crítica que podríamos hacer a los ejemplos anteriores es que el valor de las cosas aumenta con el tiempo y que lo que puedo comprar hoy con \$24,991 no es lo mismo que lo que podré comprar en el año 58, por ejemplo. Están pensando en el enemigo número uno de nuestro bolsillo, la inflación. Compliquemos el ejemplo para reflejar la inflación.

Si estamos dejando crecer nuestros gastos al nivel de inflación es justo que dejemos que nuestros salarios crezcan también al nivel de la inflación y un poquito más. Muchas personas son lo suficientemente afortunadas de trabajar para instituciones que les cubren la inflación y les pagan un poquito más.

Ejemplo 7.4 Asumamos pues que mi salario (nominal esta vez) crece al 3.5 % y que la inflación es 3.0 %. Recuerden que la moneda oficial de este curso es el dólar. Estos números son bastante realistas. La tasa de interés todavía es 8 %. ¿Qué nivel de consumo constante *en términos reales* puede sostenerse por 60 años?

Ahora estamos comparando un gradiente de 30 años (el salario que crece al 3.5 %) con otro gradiente (el consumo que crece a la tasa de inflación del 3 %).

$$\begin{aligned}
\frac{25000}{0{,}08-0{,}035}\left(1-\left(\frac{1{,}035}{1{,}08}\right)^{30}\right) &= \frac{c}{0{,}08-0{,}03}\left(1-\left(\frac{1{,}03}{1{,}08}\right)^{60}\right)\\
c &= 21267{,}09
\end{aligned}$$

Admitámoslo. Las cosas han empeorado un poco ahora que tomamos en cuenta la inflación. Pero todavía el resultado es sorprendente. Necesito comenzar a ahorrar el 15 % de mi salario[2] para garantizarme *en términos reales* el mismo nivel de vida por el resto de mis días. Las figuras 2, 3 y 4 muestran la evolución del salario, el nivel de consumo y los ahorros por año de Pedro. Noten en la figura del consumo que este crece a la tasa de inflación de 3 %. Esto quiere decir que en *términos reales*,

[2]Esta tasa de ahorro contra salario irá creciendo a medida que crece mi salario El último año de mi vida como trabajador en este ejercicio yo ahorraré el 26 % de mi salario.

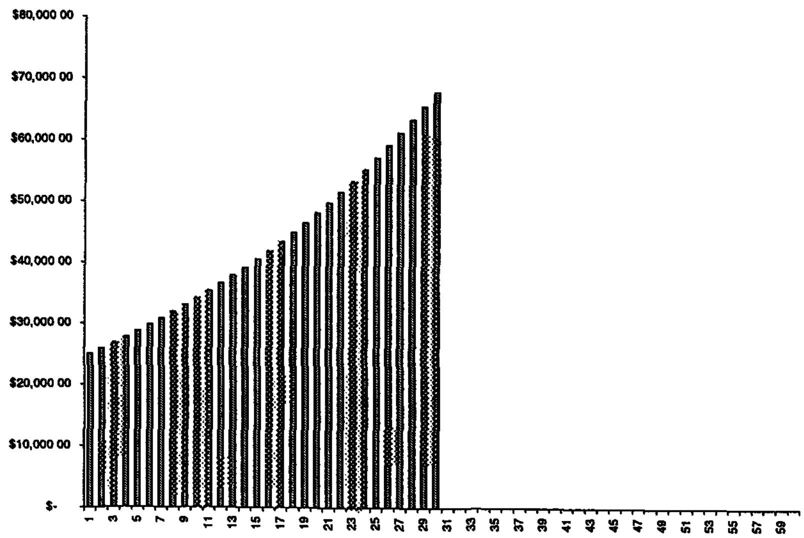

FIGURA 2. Evolución del Salario de Pedro en el Ejemplo 7.4. Comienza en 25000 y crece al 3.5 % anual.

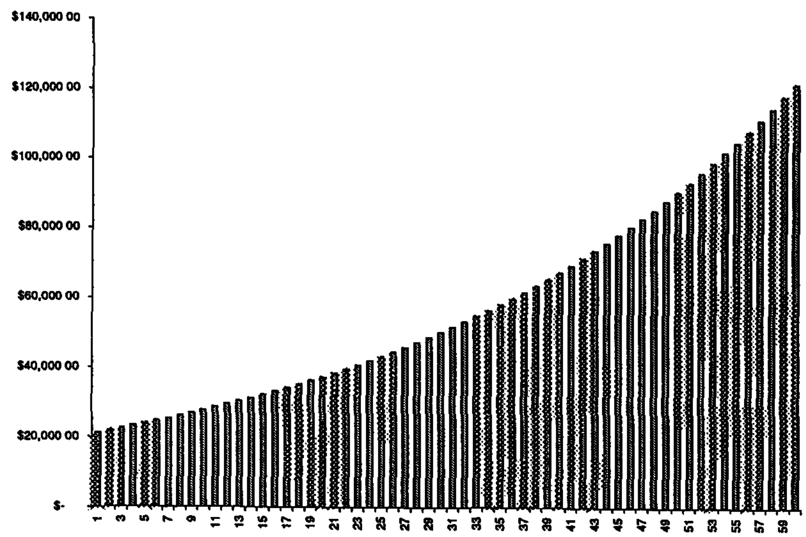

FIGURA 3. Evolución del Consumo de Pedro en Ejemplo 7.4. Este consumo es nominal y crece a la tasa de inflación. Refleja un nivel de consumo *real* constante.

el nivel de consumo es *constante* (¿Cómo haríamos para reflejar un crecimiento del consumo en términos reales?). La evolución del ahorro es también interesante. Es positivo y creciente en el periodo de trabajo del individuo. Es negativo (es, de hecho, la imagen en el espejo del gráfico del consumo) en el periodo de retiro.

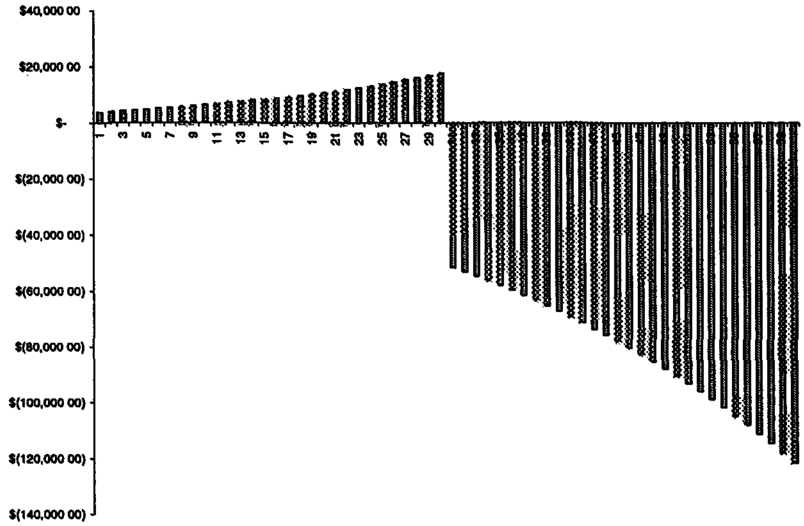

FIGURA 4. Evolución del Ahorro Anual de Pedro en el Ejemplo 7.4. Números positivos son depositos, números negativos son retiros.