Sin SIM 1:45 p.m. 9 %

Razonamiento matemático

1

Introducción

Hola!, el presente libro tiene como objetivo ayudar a aquellos estudiantes que están próximos a presentar la prueba PAEP con el propósito de poder ingresar a un programa de maestría o doctorado en alguna universidad, ya sea pública o privada, de la República Mexicana.

Debido a que actualmente se cuenta con muy pocos recursos y materiales para presentar el examen en cuestión, me di a la tarea de desarrollar diversos manuales que le permita al alumno disponer de las herramientas adecuadas para llegar lo mejor preparado posible a dicho examen,

En marzo de 1991, el Sistema Tecnológico de Monterrey con la asesoría inicial del College Board de Puerto Rico y la participación de profesores de diferentes regiones de México, se dieron a la tarea de desarrollar una prueba que, además de contar con un alto nivel de validez y confiabilidad, permitiera facilitar el proceso de admisión a estudios de posgrado y para ello desarrollaron la Prueba de Admisión a Estudios de Posgrado (PAEP).

Tengo la fuerte convicción de que entre más conozcas la prueba mejores resultados obtendrás, es por ello que la serie de libros que hemos desarrollado te pueden ser de mucha utilidad. El primero de ellos se enfoca únicamente al razonamiento matemático. El segundo al razonamiento verbal. El tercero a las habilidades cognitivas y el último enfocado a las áreas de física, química y biología (los cuales irán saliendo de manera paulatina)

Los libros que hemos desarrollado buscan, en primer lugar que el alumno conozca a detalle de qué se trata la prueba PAEP, la manera en que está estructurada, los objetivos que persigue, los métodos que utiliza, en fin, toda la información que pueda ser de utilidad a los estudiantes para poder conocer mejor a lo que se enfrenta. El segundo y más importante, es la posibilidad que en cuatro pequeños manuales el alumno pueda obtener toda la información necesaria que le permita fortalecer y ampliar sus habilidades a fin de que pueda obtener el puntaje que se requiere para acceder al nivel de estudio de su elección.

Es importante aclarar que debido a que la PAEP es un requisito para cualquier tipo de maestría o doctorado, el perfil de los alumnos es muy variable, pueden ser desde ingenieros doctores, físicos hasta aquellos provenientes de las ciencias humanas, es por ello que hemos desarrollado manuales lo más sencillos posibles para que cualquier tipo de estudiante, sin ser especialista, pueda entenderlo. Por lo que les pedimos a nuestros lectores que, si en ocasiones nuestros manuales son demasiado básicos, recuerden que para otros tal vez no lo sea tanto.

Este primer manual, como ya hemos mencionado, tiene como objetivo ayudarte a estudiar matemáticas para que puedas presentar lo más preparado posible tu prueba PAEP. Para ello lo hemos dividido en dos grandes secciones. La primera se ofrecen herramientas teóricas tomadas de las matemáticas, las cuales es preciso que estudies, pero sobre todo que las comprendas y que seas capaz de utilizarlas en casos concretos.

En cambio, la segunda sección se encuentra conformada con ejercicios en donde puedas aplicar los conocimientos obtenidos en la primera sección, se tratan de ejercicios parecidos a los que aparecerán en tu prueba PAEP (pero nunca serán los mismos, sólo son similares).

En la primera parte a su vez se encuentra dividido en 8 capítulos:

1)Aritmética
2)Álgebra
3)Geometría
4)Trigonometría
5)Probabilidad
6)Estadística
7)Conjuntos
8) Cálculo diferencial e integral

Debido a la gran cantidad de información que a lo largo de milenios se ha desarrollado alrededor de las matemáticas, aquí solamente se te muestran aquellos principios, fórmulas, conceptos, procedimientos y teoremas que te pueden ser de gran utilidad durante el examen. No obstante, si crees que no es suficiente, te recomendamos que consultes algunos otros textos que ofrecemos en la bibliografía. Recuerda que no debes memorizarlos de forma mecánica, sino más bien debes ser capaz de utilizarlos para resolver problemas matemáticos y sobre todo, en el menor tiempo posible

En cuanto a la segunda parte del libro busca que te vayas familiarizando con la prueba pues los ejercicios que te ofrecemos son similares a los de la prueba, pero lo que si es lo mismo son las instrucciones, por ello te recomendamos que las comprendas a fin de que el día del examen ya no tengas la necesidad de leerlas y con ello podrás ahorrar ciertos segundos que te pueden ser útiles para contestar con más calma tu prueba.
Otro objetivo que tenemos es que te vayas familiarizando con el uso del tiempo, pues la PAEP se trata de un examen contra reloj, por ello al pasar a la segunda parte de este manual te recomendamos que trates de responder cada uno de los ejercicios en un tiempo no mayor a un minuto y así, puedas ir adqui-

riendo confianza y empieces a manejar y distribuir tus tiempos de respuesta.

Finalmente queremos comentarte que a lo largo de este manual encontraras unas imágenes de pizarrón las cuales contienen algunos consejos que tienen como objetivo llamar tu atención sobre ciertos aspectos importantes a considerar durante tu examen, es por ello que te pedimos que cada vez que veas esa figura le des doble click a la imagen a fin de que aparezca un recuadro en donde se encuentra las sugerencias a las que nos referimos.

Una vez que conoces la forma de proceder es tiempo de que inicies con el estudio de este segundo manual, ¡adelante y mucha suerte!.

2 Aritmética

Conceptos básicos

Dígitos {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Números enteros

Positivos {1, 2, 3, 4...100...n}

Negativos {-1, -2, -3, -4...-100...-n}

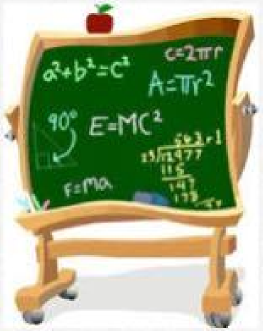
Números pares {0, 2, 4, 6,8}

Números impares {1, 3, 5, 7, 9}

Números primos {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53...}. Son aquellos que cumplen con las siguientes dos condiciones:

- Divisibles entre sí mismos y
- Divisibles entre la unidad

Números enteros consecutivos {n, n+1, n+2, n+3...}



Números enteros pares consecutivos {2n, 2n+2, 2n+4, 2n+6...}

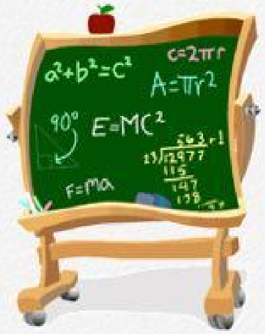
Ley de los signos

(+)(+)= +

(-)(-)= +

(+)(-)= -

(-)(+)= -



Divisibilidad

Un número es **divisible entre 2** si termina en 0, 2, 4, 6 y 8

Un número es **divisible entre 3** si la suma de sus dígitos es un múltiplo de 3 (por ejemplo: 486, 4+8+6=18 y dado que 18 es múltiplo de 3, entonces, 486 si es divisible entre 3)

Un número es **divisible entre 4** si sus últimos dos dígitos son 0 o un múltiplo de 4 (por ejemplo: 628, dado que 28 es múltiplo de 4, entonces, 628 si es divisible entre 4)

Un número es **divisible entre 5** si su último dígito es 0 o 5

Un número es **divisible entre 6** si a su vez es divisible por 2 o 3

Un número es **divisible entre 7** si al multiplicar el último dígito por dos y restar el producto al número que se forma con los dígitos restantes, la diferencia es cero o múltiplo de 7 (por ejemplo: 315, el último dígito lo multiplicamos por dos (5x2=10) y el resultado lo restamos a los otros dos dígitos (31-10= 21) como 21 es múltiplo de 7, entonces, 315 si es divisible entre 7)

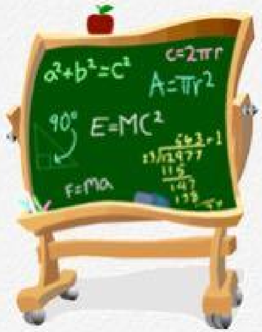
Un número es **divisible entre 8** si el número formado por las tres últimas cifras es múltiplo de 8 (por ejemplo: 5888 1016, dado que los últimos tres dígitos, 016, son múltiplos de 8, entonces 5888 1016 si es divisible entre 8)

Un número es **divisible entre 9** si la suma de sus dígitos es múltiplo de 9 (por ejemplo: 1629 dado que 1+6+2+9=18 y 18 es múltiplo de 9, entonces 1629 si es divisible entre 9).

Un número es **divisible entre 10** si el número termina en cero

Un número es **divisible entre 11** cuando la diferencia entre la suma de los dígitos de los lugares pares y la suma de los dígitos de los lugares impares es múltiplo de 11 o 0. (por ejemplo: 1364 dado que (3+4) - (1+6) = 0, entonces 1364 si es divisible entre 11. Otro ejemplo, 3729 (7+9) - (3+2) = 11, por tanto, también es divisible entre 11).

Un número es **divisible entre 12** cuando es divisible por 3 y por 4.



Fracciones

Nociones básicas

Fracciones propias positivas 1/3, 1/2, 1/4

Fracciones propias negativas -1/3, -1/2, -1/4

Fracciones impropias o mixtas negativas -5/3, -4/2, -7/4

Fracciones impropias o mixtas positivas 5/3, 4/2, 7/4

Operaciones con fracciones

Suma y resta de fracciones con igual denominador

Se suman o restan los numeradores y se mantiene el mismo denominador

Ejemplos:

$$\frac{46}{120}+\frac{28}{120}=\frac{74}{120}=\frac{37}{60}$$

$$\frac{3}{20}+\frac{18}{20}-\frac{13}{20}-\frac{4}{20}=\frac{(3+18)-(13-4)}{20}=\frac{21-17}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$$

Suma y resta de fracciones con diferentes denominadores

1)Busca el Mínimo Común Múltiplo (mcm) de los denominadores

2) El mcm se divide entre cada uno de los denominadores de las fracciones y los resultados se multiplican por su correspondiente numerador

3) Los números que resultan se suman o restan para obtener el resultado final

Ejemplos:

$$\frac{3}{2}+\frac{3}{3}+\frac{2}{6}=\frac{9+6+2}{6}=\frac{17}{6}=2\frac{4}{6}$$

$$\frac{7}{6}-\frac{2}{3}=\frac{7-4}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Multiplicación de fracciones

1) Se multiplican los numeradores por los numeradores (el resultado es el nuevo numerador) y los denominadores por los denominadores (el producto es el nuevo denominador).

2) Se simplifica.

En caso de que existan fracciones mixtas se deben convertir a fracciones impropias y posteriormente realizar los productos.

$$3\frac{2}{4}\bullet 4\frac{1}{6}=\frac{14}{4}\bullet\frac{25}{6}=\frac{350}{24}=\frac{175}{12}=14\frac{7}{12}$$

División de fracciones

1) Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el producto es el nuevo numerador

2) Se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, el resultado es el nuevo denominador

Se simplifica.

$$\frac{13}{9}\bullet\frac{4}{3}=\frac{39}{36}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$$

Convertir un decimal a fracción

En ocasiones los resultados no aparecen en forma de fracción, sino en números decimales, por ello es importante que puedas realizar esta conversión. Para ello prosigue de la siguiente manera:

1) Coloca en el denominador 10, 100, 1000 de acuerdo al número decimal que se desee convertir

2) En el numerador coloca el número a convertir y multiplícalo por el mismo número que pusiste en el denominador

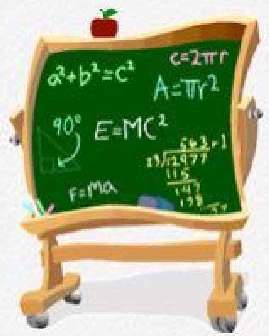
3) El resultado es la fracción que buscas. En caso de ser necesario simplifica la fracción.

Ejemplo: Si queremos convertir 1.75 a fracción

$$\frac{1.75\bullet 100}{100}=\frac{175}{100}=\frac{35}{20}=\frac{7}{4}$$

o lo que es lo mismo:

$$1\frac{3}{4}$$



Potencias

Elevación a una potencia

- Multiplicaciones y divisiones en el orden en que aparezcan de izquierda a derecha
- Sumas y restas en el orden en que aparezcan de izquierda a derecha
- Siempre debes buscar simplificar el resultado.
- Y sobre todo, ten mucho cuidado con los signos.

Potenciación

a^n= a x a x a... donde *a* es la base y *n* el exponente

Para convertir un exponente negativo en positivo es necesario pasarlo al denominador. Ejemplos:

$$a^{-2} = \frac{1}{a^2} \qquad 3^{-4} = \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{81}$$

Teorema de exponentes

1) $a^m \bullet a^n = a^{m+n}$ **"al multiplicar, súmense los exponentes"**

Ejemplos: $a^4 \cdot a^1 = a^5$

$$2^5 \cdot 2^6 = 2^{11} = 2048$$

2) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ **"al dividir, réstense los exponentes"**

Ejemplos: $\frac{a^{20}}{a^8} = a^{20-8} = a^{12}$

$$\frac{7^5 \cdot 3^8}{7^3 \cdot 3^5} = 7^{5-3} \cdot 3^{8-5} = 7^2 \cdot 3^3 = 1323$$

3) $a^0 = 1$ **"todo coeficiente elevado a cero es igual a la unidad"**

Ejemplos: $7^0 = 1$

$2534^0 = 1$

4) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplos: $\left(a^4\right)^3 = a^{12}$

$\left(5 \cdot 3 \cdot 2^4\right)^2 = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 2^8 = 25 \cdot 9 \cdot 256 = 57600$

5) $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

Ejemplos: $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$

A partir de los anteriores exponentes puedes realizar cualquier tipo de operación entre exponentes, por tal motivo, es importante que los tengas en consideración cada vez que te encuentres frente a un problema que contenga algún exponente.

Radicación

Operación que permite hallar un valor que multiplicado tantas veces como lo indica el índice, dé el valor que se encuentra dentro del radical, el cual recibe el nombre de radicando

Teorema de radicales

Los teoremas de los exponentes también se aplican a los radicales, ya que se expresan como exponentes fraccionarios.

1) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Ejemplo: $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{\left(2^3\right)^2} = \sqrt[3]{2^6} = 2^{\frac{6}{3}} = 2^2 = 4$

2) $\sqrt[n]{a \cdot b \cdot c} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} \cdot c^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c}$

Ejemplo:
$\sqrt[5]{2^{10} \cdot 5^{10}} = \sqrt[5]{2^{10}} \cdot \sqrt[5]{5^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} \cdot 5^{\frac{10}{5}} = 2^2 \cdot 5^2 = 100$

3) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

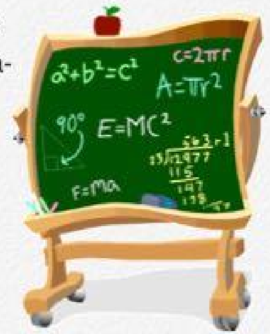
Ejemplo: $\sqrt{\frac{6^2}{3^2}} = \frac{6^{\frac{2}{2}}}{3^{\frac{2}{2}}} = \frac{6}{3} = 2$

4) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

Ejemplos:
$\sqrt[3]{\sqrt{729}} = \sqrt[3]{\sqrt{3^6}} = \left(\sqrt{3^6}\right)^{\frac{1}{3 \cdot 2}} = \left(3^6\right)^{\frac{1}{6}} = 3^{\frac{6}{6}} = 3$

Además de tener en consideración tanto los teoremas de exponentes como los de radicales, también debes ser capaz de:

1) Realizar operaciones con ambos (suma, resta, multiplicación y división) ya sea que tengan radicales iguales o diferentes
2) Simplificación de radicales
3) Racionalización de fracciones



Suma y resta con radicales semejantes

Ambas operaciones pueden realizarse si y sólo si, el índice del radical y el radicando son iguales

$$a\sqrt[n]{d}+b\sqrt[n]{d}-c\sqrt[n]{d}=(a+b-c)\sqrt[n]{d}$$

Ejemplos:

$$2\sqrt[3]{5}+11\sqrt[3]{5}=(2+11)\sqrt[3]{5}=13\sqrt[3]{5}$$

$$\frac{3}{4}\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}=\left(\frac{3-1}{4-6}\right)\sqrt{6}=\frac{7}{12}\sqrt{6}$$

Multiplicación de radicales con índices iguales

Cuando los índices de los radicales son iguales, se multiplican los radicandos (y el resultado se simplifica, de ser posible).

$$\sqrt[n]{a}\bullet\sqrt[n]{b}\bullet\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{a\bullet b\bullet c}$$

Ejemplos:

$$\sqrt{3}\bullet\sqrt{5}=\sqrt{3\bullet 5}=\sqrt{15}$$

$$2\sqrt[3]{4}\bullet 3\sqrt[3]{10}=(3\bullet 2)\sqrt[3]{4\bullet 10}=6\sqrt[3]{40}=6\sqrt[3]{2^3\bullet 5}=(6\bullet 2)\sqrt[3]{5}=12\sqrt[3]{5}$$

Pero cuando *los índices son diferentes*, se busca un índice común (el cual resulta del mínimo común múltiplo de los índices de los radicandos y se denomina como *"mínimo común índice"*)

$$\sqrt[3]{2}\bullet\sqrt{5}=\sqrt[3\times 2]{2^2}\bullet\sqrt[2\times 3]{5^3}=\sqrt[6]{2^2}\bullet\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{2^2\bullet 5^3}=\sqrt[6]{4\bullet 125}=\sqrt[6]{500}$$

$$\sqrt{2}\bullet\sqrt[4]{8}=\sqrt[2\times 2]{2^2}\bullet\sqrt[4]{8}=\sqrt[4]{2^2}\bullet\sqrt[4]{2^3}=\sqrt[4]{2^2\bullet 2^3}=\sqrt[4]{2^5}=2\sqrt[4]{2}$$

División de radicales con índices iguales

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplos:

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{10}{2}}=\sqrt{5}$$

$$\frac{\sqrt{48}}{2}=\frac{\sqrt{48}}{\sqrt{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{2^2}}=\sqrt{\frac{48}{4}}=\sqrt{12}=\sqrt{2^2\bullet 3}=2\sqrt{3}$$

Cuando tenemos *índices diferentes* se transforman los radicales a un índice común, después se realiza la división

$$\frac{\sqrt[4]{8}}{\sqrt[3]{4}}=\frac{\sqrt[4\times 3]{8^3}}{\sqrt[3\times 4]{4^4}}=\frac{\sqrt[12]{(2^3)^3}}{\sqrt[12]{(2^2)^4}}=\frac{\sqrt[12]{2^9}}{\sqrt[12]{2^8}}=\sqrt[12]{\frac{2^9}{2^8}}=\sqrt[12]{2^{9-8}}=\sqrt[12]{2}$$

$$\frac{6\sqrt{12}+2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{6\sqrt{12}}{2\sqrt{3}}+\frac{2\sqrt[3]{6}}{2\sqrt{3}}=3\sqrt{\frac{12}{3}}+\frac{\sqrt[3\cdot 2]{(2\cdot 3}}{\sqrt[2\cdot 3]{3^3}}=$$

$$3(2)+\sqrt[6]{\frac{2^2\cdot 3^2}{3^3}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot 3^{-1}}=6+\sqrt[6]{2^2\cdot\frac{1}{3}}=6+\sqrt[6]{\frac{4}{3}}$$

Racionalización

Racionalizar consiste en quitar los radicales del denominador, lo cual facilita el cálculo de algunas operaciones, además de que en la PAEP ninguna respuesta contiene un denominador con raíz cuadrada, por ello es importante que aprendas a racionalizar fracciones. Y para ello debes proceder de la siguiente forma:

a)Si se cuenta con un monomio en el denominador debes multiplicar tanto el denominador como el numerador con la raíz cuadrada que deseas eliminar.

$$\frac{x}{\sqrt[n]{y^m}}=\frac{x}{\sqrt[n]{y^m}}\bullet\frac{\sqrt[n]{y^{n-m}}}{\sqrt[n]{y^{n-m}}}=\frac{x\bullet\sqrt[n]{y^{n-m}}}{\sqrt[n]{y^{m+n-m}}}=\frac{x\bullet\sqrt[n]{y^{n-m}}}{\sqrt[n]{y^n}}=\frac{x\bullet\sqrt[n]{y^{n-m}}}{y}=\frac{x}{y}\bullet\sqrt[n]{y^{n-m}}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\bullet\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) En cambio, si lo que tienes es un binomio en el denominador (del tipo $(a\pm b)$) , lo que deberás hacer es multiplicar por el conjugado del binomio $(a\mp b)$

$$\frac{x}{y\pm z}=\frac{x}{y\pm z}\bullet\frac{y\mp z}{y\mp z}=\frac{c\bullet(y\mp z)}{y^2-z^2}$$

Ejemplo:

$$\frac{4}{1+\sqrt{2}}=\frac{4}{1+\sqrt{2}}\bullet\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{4-4\sqrt{2}}{(1)^2-(\sqrt{2})^2}=\frac{4-4\sqrt{2}}{1-2}=\frac{4-4\sqrt{2}}{-1}=4\sqrt{2}-4$$

Razones y proporciones

Una **razón** es la comparación matemática de dos cantidades. Es decir, es el resultado de comparar dos cantidades por medio de una diferencia o por medio de un cociente Si estas dos cantidades se representan por los valores "a" y "b", entonces la razón con que se comparan se escribe:

$\frac{a}{b}$ o **a : b.**

Se dice que dos cantidades son *directamente proporcionales* cuando al multiplicar una de ellas por un número, la otra queda multiplicada por el mismo número (y lo mismo sucede si se dividen).

Razón de proporcionalidad

Si *a* y *b* son dos cantidades directamente proporcionales, la razón a/b recibe el nombre de razón de proporcionalidad, la cual siempre es constante.

Proporción

Es una proposición que establece que dos razones son iguales. Si la razón de a : b y c : d entonces tenemos lo siguiente:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

a:b :: c:d con $b \neq 0$ y $d \neq 0$ Y se lee: *a* es a *b* como *c* es a *d*

Donde *a* y *d* son los extremos mientras que *b* y *c* son los medios.

Ejemplo:

$\frac{5}{4}=\frac{20}{16}$ donde (5)(16)=(4)(20)= 80

En una proporción un extremo es igual al producto de los medios dividido por el extremo restante, es decir:

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ entonces: $a=\frac{b \cdot c}{d}$ o bien $d=\frac{b \cdot c}{a}$

Ejemplos:

$\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$ se tiene que $2=\frac{3 \cdot 10}{15}$ y $15=\frac{3 \cdot 10}{2}$

$\frac{m}{5}=\frac{24}{30}$ dado que m es un extremo tenemos que:

$$m=\frac{5 \cdot 24}{30}=\frac{120}{30}=4$$

lo que significa que m=4

Regla de tres

Instrumento útil que consiste en una sencilla operación que nos permite encontrar el cuarto término de una proporción, de la que sólo conocemos tres términos.

Se conforma de: los *supuestos* (datos conocidos) y la *pregunta* (es decir, el dato no conocido).

Ejemplo:

Si 12 discos compactos cuestan $600, ¿cuánto costarán 18?

Supuestos: 12 discos por $600

Pregunta: 18 discos

Se forma la proporción de la siguiente manera:

$\frac{12}{18}=\frac{600}{x}$ donde $x=\frac{(600)(18)}{12}=\frac{10800}{12}=900$

Por tanto 18 discos cuestan $900

Tanto por ciento

El porcentaje o tanto por ciento es una de las aplicaciones más usadas de las proporciones. Se trata de una forma de comparar cantidades, en donde se relaciona una magnitud (ya sea que se trate de una cifra o cantidad) con el número de partes de las cien en las que se divide dicha cantidad. Se representa con el símbolo % o en forma de fracción.

Así por ejemplo, el 8% de 48 equivale a tomar 8 centésimas de 48 $\left(\frac{8}{100}=0.08\right)$, es decir, se divide 48 en 100 partes y se toman 8.

Ejemplo:

Calcula el 12% de $1500

Para ello se forma una regla de tres:

$\frac{100}{12}=\frac{1500}{x}=\frac{1500 \cdot 12}{100}=180$

Por tanto decimos que el 12% de $1500 son $180

Factorial

Es el producto del mismo número por todos sus antecesores.
Se representa con un signo de admiración '!'
Así por ejemplo: 6!= 6x5x4x3x2x1=720
Nota: el factorial cero es igual a 1

3 Álgebra

Expresiones algebraicas

Una **expresión algebraica** es un "conjunto de letras (variables) y de números reales (constantes) que usan operaciones de suma, resta, multiplicación, división y exponenciación."

Monomio: Expresión algebraica que consta de un solo término, por ejemplo:

$$4x^2yz$$

Binomio: Expresión compuesta de dos términos algebraicos unidos por los signos más o menos, por ejemplo:

$$2x^2+6x$$

Trinomio: Expresión algebraica compuesta de tres términos unidos por los signos más o menos, por ejemplo:

$$4x^2+6x+8$$

Polinomio: Expresión algebraica compuesta de varios términos unidos por los signos más o menos, por ejemplo:

$$5x^5-6x^4+3x^3-4x^2+2x-10$$

Operaciones con polinomios y monomios

Podemos sumar y restar polinomios en forma muy parecida a como lo hacemos con los números reales. Para ello, requerimos reducir los términos semejantes de los **polinomios**.

$15x^{2}y^{6}z^{4}+5x^{2}y^{6}z^{4}-3x^{2}y^{6}z^{4}=17x^{2}y^{6}z^{4}$

En cambio, si no cuentan con términos semejantes entonces los dejamos igual

$(45a^{5}-36b^{4}-16c^{3})-(40a^{4}-16b^{4}-6c^{3})=$

$45a^{5}-36b^{4}-16c^{3}-40a^{4}+6b^{4}+6c^{3}=$

$45a^{5+}\ 40a^{4}-20b^{4}-10c$

En cuanto a la *multiplicación,* las propiedades de los números reales, las leyes de signos y la ley de los exponentes, nos permiten obtener el producto de los polinomios.

a)Monomio por monomio: multiplicamos primero los coeficiente y después las bases.

$(-7x^{4}y^{3}z^{2})(3x^{2}y^{6}z)=$

$(-7)(3)(x^{4}y^{3}z^{2})(x^{2}y^{6}z)=$

$-21\ x^{4+2}y^{3+6}z^{2+1}=$

$-21x^{6}y^{9}z^{3}$

b) Polinomio por monomio: se multiplica cada uno de los términos del polinomio por el monomio

$(5x^{5}y^{4}-3x^{4}y^{3}z+4xz^{4})(-7x^{4}y)=$

$(5x^{5}y^{4})(-7x^{4}y)+(-3x^{4}y^{3}z)(-7x^{4}y)+(4xz^{4})(-7x^{4}y)$

$(-35x^{5+4}y^{4+1})+(21x^{4+4}y^{3+1}z)+(-28x^{4+1}yz^{4})$

$-35x^{9}y^{5}+21x^{8}y^{4}z-28x^{5}yz^{4}$

c) Polinomio por polinomio:

1) Se escriben los factores de la multiplicación en forma escalonada (al igual como lo harías con una multiplicación aritmética), teniendo en cuenta que debes ordenar los polinomios con respecto a los exponentes en forma ascendente o descendente, según sea el caso.

Si tenemos la siguiente operación: $(6x^2-3x-2)(4x^2-3x^2-6)$ ordenamos:

$$\begin{array}{l} 6x^2-3x-2 \\ \underline{-3x^2+4x-6} \end{array}$$

2) Multiplica el primer término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba.

$$\begin{array}{l} 6x^2-3x-2 \\ \underline{-3x^2+4x-6} \\ -18x^4+9x^3+6x^2 \end{array}$$

ya que $(-3x^2)(6x^2)=-18x^4$; $(-3x^2)(-3x)=9x^3$; y, $(-3x^2)(-2)=6x^2$

3) Multiplica el segundo término del polinomio de abajo por cada uno de los términos del polinomio de arriba. Los resultados se colocan debajo de sus respectivos términos semejantes del primer resultado.

$$\begin{array}{l} 6x^2-3x-2 \\ \underline{-3x^2+4x-6} \\ -18x^4+9x^3+6x^2 \\ \qquad\quad 24x^3-12x^2-8x \end{array}$$

ya que $(4x)(6x^2)=24x^3$; $(4x)(-3x)=-12x^2$; y, $(4x)(-2)=-8x$

4) Repite el paso 3 para cada uno de los términos siguientes del polinomio (en caso de existir)

$$\begin{array}{l} 6x^2-3x-2 \\ \underline{-3x^2+4x-6} \\ -18x^4+9x^3+6x^2 \\ \qquad\quad 24x^3-12x^2-8x \\ \qquad\qquad\quad \underline{-36x^2+18x+12} \end{array}$$

ya que $(-6)(6x^2)=-36x^2$; $(-6)(-3x)=18x$; y, $(-6)(-2)=12$

5) Realiza la suma

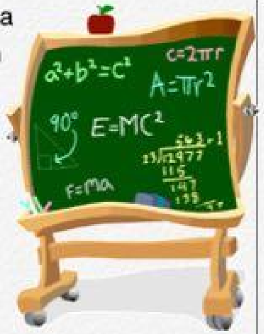
$$\begin{array}{l} 6x^2-3x-2 \\ \underline{-3x^2+4x-6} \\ -18x^4+9x^3+6x^2 \\ \qquad\quad 24x^3-12x^2-8x \\ \qquad\qquad\quad \underline{-36x^2+18x+12} \\ -18x^4+23x^3-42x^2+10x+12 \end{array}$$

Por consiguiente el resultado es: $-18x^4+23x^3-42x^2+10x+12$

En cuanto a la *división,* al igual que en la multiplicación, necesitamos utilizar las propiedades de las operaciones de los números reales, las leyes de lo signos y las leyes de los exponentes, además de seguir los siguientes procedimientos, según sea el caso.

a) Monomio entre monomio: primero realiza la división de los coeficientes. A continuación aplica la ley de los exponentes para las bases.

$$\frac{-24a^5b^4c^6}{8a^2b^3c} = \frac{-24}{8}a^{5-2}b^{4-3}c^{6-1} = -3a^3bc^5$$



b) Polinomio entre monomio: se divide cada término del polinomio entre el monomio

$$\frac{4x^4 - 10x^3 + 2x^2}{-2x^2} = \frac{4x^4}{-2x^2} - \frac{10x^3}{-2x^2} + \frac{2x^2}{-2x^2} =$$

$$-2x^{4-2} + 5x^{3-2} - 1x^{2-2} = 2x^2 + 5x - x$$

Sistemas de ecuaciones con dos variables

Además de la resolución a partir de un gráfico, un sistema de ecuaciones con dos variables puede ser resuelto mediante tres diferentes métodos, que, además de ser más precisos que la gráfica, son mucho más rápidos de realizar (obviamente, quien elija cuál utilizar serás tú). Para demostrar que no importa el método que elijas el resultado será el mismo, a continuación se resolverá sólo un sistema de ecuaciones con los tres métodos y así podrás observar que el resultado no cambia.

1) Método de suma y resta

Este método consiste en multiplicar una o ambas ecuaciones por algún número, de forma que obtengamos un sistema equivalente al inicial, en el que los coeficientes de la **x** o de la **y** sean iguales pero con signo contrario. A continuación se suman las ecuaciones del sistema para obtener una sola ecuación de primer grado con una incógnita. Una vez resuelta esta, sustituimos el valor encontrado en alguna de las ecuaciones originales para obtener el valor de la segunda incógnita.

Ejemplo:

Si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: 3x+3y=24 y 2x+y=13

1) Multiplica por un número (en este caso -3)

3x+3y=24

-3(2x+y=13) por tanto queda como -6x-3y=-39

2) Suma el sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{l} 3x+3y=24 \\ \underline{-6x-3y=-39} \\ -3x \quad\quad =-15 \end{array}$$

3)Despeja x

$$x=\frac{-15}{-3}=5$$

4)Una vez que sé el valor de X lo sustituyo en alguna de las dos ecuaciones

3x+3y=24 y queda así: 3(5)+3y=24

15+3y=24, así que resuelvo la ecuación:

$$3y = 24 - 15$$

$$y = \frac{9}{3} = 3$$

Por tanto el resultado es (5,3)

2)Método por sustitución

La técnica algebraica denominada método de sustitución consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituirla en la otra; así, se obtiene una sola ecuación con una incógnita. Una vez obtenido el valor de esta incógnita, se sustituye su valor en cualquiera de las ecuaciones del sistema inicial para calcular el valor de la otra incógnita.

Ejemplo:

Si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: 3x+3y=24 y 2x+y=13

1) Despejo la incógnita de una ecuación y la sustituyo en la otra ecuación

y=13-2x

3x+3y=24, al sustituirla queda: 3x+3(13-2x)=24 y resuelvo

3x+39-6x=24

-3x=24-39

$$x = \frac{-15}{-3} = 5$$

2) Una vez que sé el valor de x, lo sustituyo en cualquiera de las dos ecuaciones para obtener el valor de y

y=13-2x; así que y=13-2(5), por tanto y=13-10=3

Por consiguiente el resultado es (5, 3)

3)Método por igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones e igualar las expresiones resultantes; se resuelve la ecuación de primer grado con una incógnita obtenida y se sustituye este valor en las ecuaciones iniciales.

Ejemplo:

Si tenemos el siguiente sistema de ecuaciones: 3x+3y=24 y 2x+y=13

1) Despejamos una incógnita en ambas ecuaciones, en este caso será 'y'

$$3y = 24 - 3x \quad y = \frac{24 - 3x}{3} \quad y_1 = 8 - x$$

y_2=13-2x

2) Se igualan y_1 y y_2 y se resuelve

8-x=13-2x

-x+2x=13-8

x=5

3) Se sustituye el valor encontrado en cualquiera de las ecuaciones

y=8-x

y=8-5

y=3

Por tanto el resultado es (5, 3)

Productos notables

Se tratan de aquellas multiplicaciones que contienen expresiones algebraicas cuyo resultado puede ser obtenido por simple inspección sin necesidad de llevar a cabo la operación, siempre y cuando se sigan ciertas reglas preestablecidas de factorización (lo que permite simplificar y sistematizar la resolución de muchas operaciones). Observemos tres productos notables que te pueden ser de gran utilidad.

Binomio al cuadrado = Trinomio al cuadrado

Trinomio al cuadrado: se conforma de los cuadrados de los términos primero y último y el término central es el doble del producto del primer y último término.

$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$

Ejemplo:

$(x+2)^2 = x^2+4x+4$

Binomios conjugados = Diferencia al cuadrado

Diferencia al cuadrado: se forma al multiplicar la suma y la diferencia de dos términos y su resultado es el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término (PETERSON; 2008, Pág.:258)

$(a+b)(a-b)= a^2 - b^2$

Ejemplo:

$(8bw^2+6z^2)(8bw^2-6z^2) = 64b^2w^4 + 36z^4$

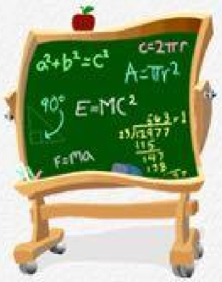
Binomios con término común = Trinomio al cuadrado

Binomios con término común: producto de dos binomios que tienen el mismo primer término (PETERSON; 2008, Pág.:259)

$(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$

Ejemplo:

$(x-3)(x+8) = x^2-5x-24$



Número de coeficientes

Uno de los posibles ejercicios que te puedes encontrar en la prueba PAEP es <u>saber el número de elementos que contiene</u>

un binomio elevado a alguna potencia. Para evitar que realices el desarrollo completo, solo sigue esta fórmula:

(Coeficiente del binomio +1)

Así, si tienes $(a+b)^4$ y dado que 4+1=5, el número de elementos de ese binomio es de 5

Ejemplo:

$\left(\frac{1}{x}+\frac{x}{2}\right)^7$ dado que: 7+1=8, el número de elementos de este binomio es de 8

Factorización

Factorizar es expresar una suma o diferencia de términos como el producto indicado de sus factores; éstos se presentan en la forma más simple.

Factor común: es la expresión común que tienen todos los términos de una expresión algebraica. Así por ejemplo, si queremos factorizar $12a^6b^7c-16a^5b^2c^3+20a^3b^{10}$ lo que debemos hacer es primero, buscar el factor común de los coeficientes, que no es otra cosas más que el Máximo Común Divisor (en adelante MCD) y en segundo lugar buscar el factor común de las variables, quedando de la siguiente forma:

MCD (12, -16, 20)= 4 Factor común de las variables= a^3b^2

Una vez que tenemos estos datos se realizan las divisiones para cada uno de los términos y el resultado es la factorización que buscamos.

$12a^6b^7c -16a^5b^2c^3 + 20a^3b^{10} = 4a^3b^2(3a^3b^5c - 4a^2c^3 + 5ab^8)$

Lo relevante de la factorización es que puedas aplicarlo en casos específicos, sobre todo para los productos notables, en especial en el *Trinomio al cuadrado*, y para ello existen diversas maneras para que puedas factorizarlo, a continuación se explican algunos métodos, utiliza el que necesites, según sea el caso.

Para el caso de un *trinomio al cuadrado perfecto*:

1)Verifica que los términos se encuentren ordenados, de lo contrario deberás hacerlo.

2) Saca la raíz cuadrada del primero y último término del trinomio, es decir, de los extremos. Ejemplo, si tenemos el siguiente trinomio cuadrado perfecto: $a^2 \pm 2ab + b^2$ dado que se encuentra ordenado procedemos a sacar la raíz de los extremos $\sqrt{a^2} = a$ y $\sqrt{b^2} = b$

3)Para comprobar que la expresión que tenemos es un trinomio cuadrado perfecto, se realiza el doble producto de las raíces (así tenemos que: 2ab) si el resultado de dicha comprobación es igual al segundo término del trinomio en cuestión, entonces su factorización es igual al cuadrado de una suma o a la diferencia de las raíces que obtuviste anteriormente, tal y como a continuación se muestra::

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$$

Ejemplo:

$4x^2+12x+9$

1) Primero sacamos las raíces de los términos extremos

$\sqrt{4x^2} = 2x$ y $\sqrt{9} = 3$

2) Comprobamos: $2(2x \cdot 3) = 12x$

3) Finalmente, la factorización queda de la siguiente forma:
$4x^2+12x+9 = (2x+3)^2$

Trinomio de la forma x^2+bx+c (resultado del producto de binomios con términos en común)

1) Saca la raíz cuadrada del primer término, el resultado se coloca en dos paréntesis distintos.

2) En el primer paréntesis se coloca el signo que tenga el segundo término del trinomio en cuestión. En cambio, el segundo signo se obtiene de multiplicar el signo del segundo término por el del tercer término.

3) Se buscan dos cantidades cuyo producto sea igual al tercer término del trinomio, pero cuya suma sea igual al segundo término, una vez que los has encontrado, anótalos en los paréntesis, dándote como resultado la factorización que buscas.

Ejemplo:

$x^2+8x+15$

1)Sacar la raíz y colocarla en 2 paréntesis: (x)(x)

2) Colocación de signos: (x +)(x +)

3)Busca dos cantidades que multiplicadas sean igual al tercer término (5x3=15) y sumadas sean igual al segundo (5+3=8) y anótalos en los paréntesis

$(x + 5)(x + 3)$

Trinomio de la forma x^2+bx+c (el coeficiente del término cuadrático es diferente de uno)

1)Se multiplica y se divide el coeficiente del término cuadrático por los términos extremos, en cambio , el segundo término sólo se deja indicada la multiplicación.

2) La expresión del numerador se factoriza como un trinomio de la forma x^2+bx+c

3) Se obtiene el factor común de cada binomio y se simplifica la fracción

Ejemplo:

$20x^2+13+2$

1)Multiplica y divide.

$$\frac{20(20x^2)+20(13)+20(2)}{20}=\frac{400x^2+20(13)+40}{20}$$

2)Factoriza

$$\frac{(20x+8)(20x+5)}{20}$$

3) Obtén el factor común y simplifícalo

$$\frac{4(5x+2)5(4x+1)}{(4)(5)}=(5x+2)(4x+1)$$

Así pues, el resultado es: **(5x+2)(4x+1)**

Ecuaciones de segundo grado

Existen diversas formas de solucionar una ecuación de segundo grado, a continuación te mostraremos únicamente una, pues de la otra ya hemos hablado en la factorización, la tercera sería mediante gráfico, pero no la trataremos aquí de forma muy profunda. Tú debes elegir con la que te sientas más cómodo.

Fórmula general

Sólo debes aprenderte la fórmula, sustituir los valores y resolver

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Ejemplo:

Si tenemos la siguiente ecuación **$3x^2$-5x-2=0** tenemos que: a=3, b=-5 y c=-2, por tanto, sustituimos y tenemos lo siguiente:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)}$$

Resolvemos:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{5 \pm 7}{6}$$

Y las raíces son:

$$x_1 = \frac{5+7}{6} = \frac{12}{6} = 2$$ y también $$x_2 = \frac{5-7}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$$

La recta

La **recta numérica real** o **recta de coordenadas:** es una representación geométrica del conjunto de los números reales. Tiene su origen en el cero, y se extiende en ambas direcciones, los positivos en un sentido (la derecha) y los negativos en el otro (la izquierda). Existe una correspondencia uno a uno entre cada punto de la recta y un número real.

Ecuación estándar

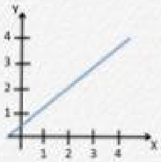
y= mx+b

donde: mx es la pendiente y b es la ordenada al origen

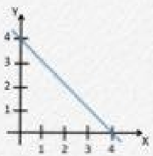
Pendientes: cambio de “Y” entre el cambio de “X”, es decir:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}$$

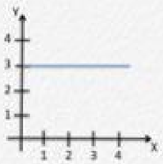
Función creciente: pendiente positiva, donde m(+)



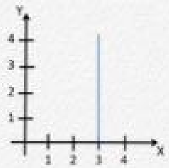
Función decreciente: pendiente negativa, donde m(-)



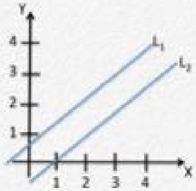
Función horizontal: pendiente igual a cero, donde m=0



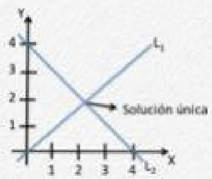
Función vertical: pendiente indefinida donde m=*ind*



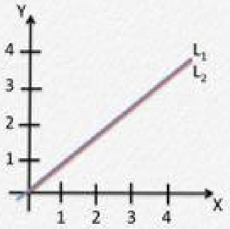
Ahora bien, si las pendientes son paralelas, no existe solución, ya que nunca se intersectarán donde: $L_1 \parallel L_2$ por tanto $m_1 = m_2$



Si las pendientes son perpendiculares existe una solución única, debido a que L_1 posee una pendiente positiva y L_2 una pendiente negativa y por consiguiente el producto de las pendientes es igual a $m_1 m_2 = -1$

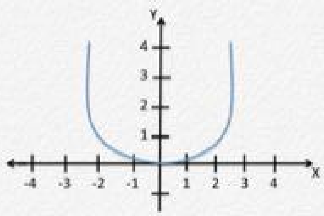


Pero, si tenemos una recta sobre otra (que incluso aparentan ser la misma) tenemos una solución múltiple

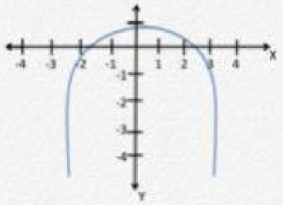


Dado que tienes muy poco tiempo para realizar todo el procedimiento que implica graficar una función, lo que puedes hacer es OBSERVAR lo que la función te muestra. Así por ejemplo, si la función es cuadrática, entonces:

$y=x^2$
la función es positiva

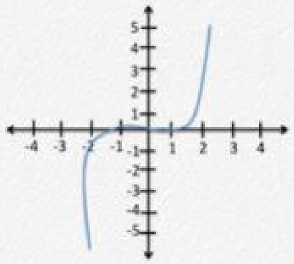


$y=-x^2$
la función es negativa

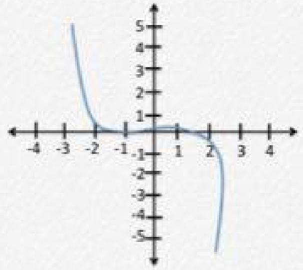


Si la función es cúbica:

$y=x^3$

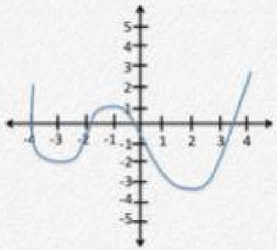


$y=-x^3$



Si la función es polinomial

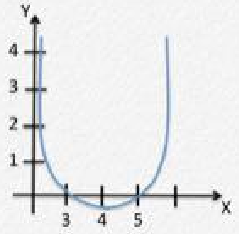
$x= x^4$



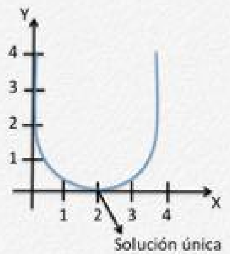
Para evitar que realices todo el procedimiento puedes hacer lo siguiente:

*Utilizar el discriminante de la fórmula general de las ecuaciones cuadráticas (en adelante D=)

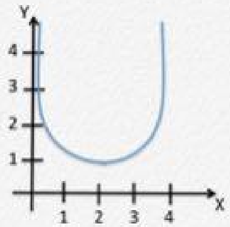
Si el D= es mayor a cero lo que se obtienen son dos soluciones reales distintas



Si el D= es igual a cero lo que se obtiene son dos soluciones reales iguales



Si el D= es menor a cero lo que se obtienen son dos soluciones imaginarias distintas, lo que significa que no existe intersección en las abscisas



Desigualdades

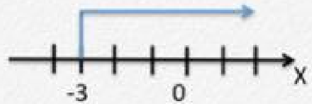
Las desigualdades son de gran importancia, debido a que "...proporcionan los medios de expresar matemáticamente las restricciones explícitas que influyen en las decisiones y limitan la libertad de expresión..."(SPRINGER, 1972; Pág.; 122)

Es la relación de orden que existe entre dos cantidades, y a diferencia de lo que ocurre en la mayoría de las matemáticas usuales, es frecuente hallar que existen mucha soluciones posibles o factibles, por consiguiente, son necesarias técnicas matemáticas especiales, comenzando pos su notación la cual se representa con los símbolos menor que (<), mayor que(>), igual o menor que (≤) e igual o mayor que (≥) .

Dada la expresión $3x-2<8$, donde x es una variable, su solución es encontrar el conjunto de valores que la satisfagan, si esto ocurre recibe el nombre de *conjunto de solución de la igualdad*. Por ello, a diferencia de las igualdades en donde se obtiene una única solución, en las desigualdades se obtiene una región o intervalo de solución.

Para determinar el intervalo de solución de una desigualdad, se procede de la misma manera como en una ecuación lineal, despejando la variable y tomando en consideración las propiedades de las desigualdades.

Por consiguiente, si tenemos $x+3\geq 0$ despejamos y tenemos lo siguiente: $x\geq -3$, de manera gráfica la solución es:



$[-3,+\infty)$

Nota: en la notación, el paréntesis redondo no incluye al número escrito, en cambio, el corchete si lo incluye.

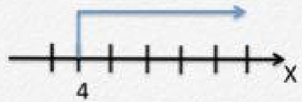
Ejemplos:

$2x-3\geq 5$

$2x\geq 5+3$

$2x\geq 8$

$x\geq \frac{8}{2}=4$



$[4,+\infty)$

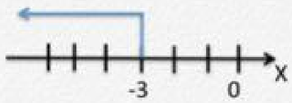
$-5x+3 \geq 18$

$-5x \geq 18-3$

$-x \geq -\frac{15}{5}$

No obstante, si al despejar una variable con un número negativo (y sólo cuando implica una división o multiplicación) es necesario cambiar el signo de 'igual' o 'mayor que' por el de 'menor' o 'igual que'.

$x \leq -3$



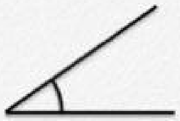
$(-\infty, -3]$

4

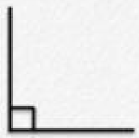
Geometría

Ángulos

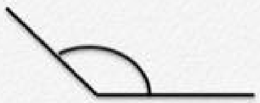
Ángulo agudo
menor a 90°



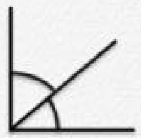
Ángulo recto
de 90°



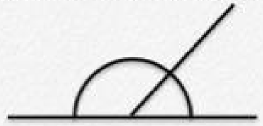
Ángulo obtuso
mayor de 90° y menor de 180°



Ángulos complementarios
la suma de 2 ángulos es de 90°

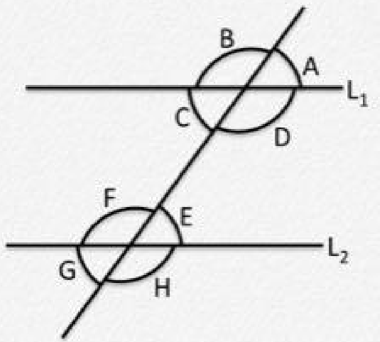


Ángulos suplementarios
la suma de 2 ángulos es de 180°



Rectas paralelas

Dos rectas paralelas cortadas por una secante



Donde L1 y L2 son paralelas y han sido cortadas por una transversal. Tenemos los siguientes ángulos:

Externos: <A, <B, <G y <H
Internos: <C, <D, <F y <E

Alternos: dos ángulos que no son adyacentes pero están en lados diferentes de la transversal.

Alternos internos: ángulos internos no adyacentes situados en distinto lado de la transversal. Los ángulos alternos internos son iguales: <D=<F y <C=<E

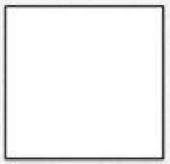
Alternos externos: ángulos externos no adyacentes situados en distinto lado de la transversal. Los ángulos alternos externos son iguales: <B=<H y <A=<G

Correspondientes: ángulos que no son adyacentes en el mismo lado de la transversal y uno de los ángulos es interno, mientras que el otro es externo. Los ángulos correspondientes son iguales: <B=<F; <C=<G; <A=<E y <D=<H

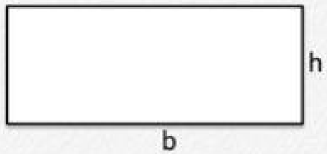
Colaterales internos (suplementarios): dos ángulos internos no adyacentes y situados del mismo lado de la secante. Los ángulos colaterales internos suman 180º: <C+<F= 180º y <D+<E=180º

Colaterales externos (suplementarios): ángulos externos no adyacentes situados del mismo lado de la secante. Los ángulos colaterales externos suman 180º: <B+<G=180º y <A+<H=180º

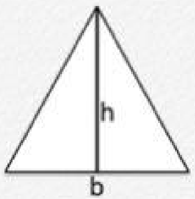
Áreas y perímetros



Suma de sus ángulos:360°
Perímetro: 4 x lado
Área: lado al cuadrado (L^2)

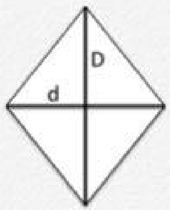


Suma de sus ángulos: 360°
Perímetro: 2b x 2h
Área: b x h



Suma de sus ángulos:180°
Perímetro: suma de sus lados

Área: $\frac{bxh}{2}$

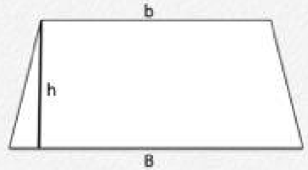


Perímetro= 4xlado

Área= $\frac{D \cdot d}{2}$

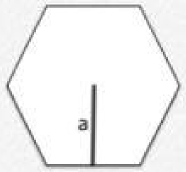
Perímetro= 2B+2C

Área= Bxh

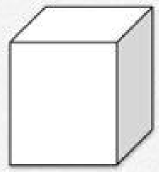


Perímetro= suma de sus 4 lados

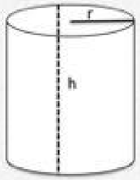
Área= $\frac{B \times b}{2} \cdot h$

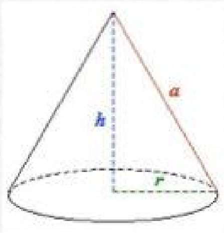


Perímetro: 6(lado)
Volumen: $2\pi r(h+r)$



Área: 6 x lado²
Volumen: Lado al cubo (L^3)





Área= $2\pi r(h + r)$

Volumen: $\pi r^2 \cdot h$

Área= $\pi r(a+r)$

Volumen: $\frac{1}{3}\pi r^2 h$

Para conocer la suma de los ángulos internos de cualquier figura debes utilizar la siguiente fórmula:

Al número de lados le restas dos y lo multiplicas por 180º

$$(\# lados - 2)(180^{o})$$

Ejemplos:

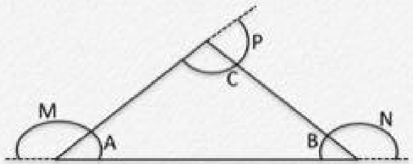
De un pentágono: (5-2)(180º)=540º, por tanto cada uno de sus ángulos mide 108º

De un octaedro (8-2)(180º)= 1080º donde cada uno mide 135º

Triángulos

Hay que tener en consideración algunos teoremas importantes sobre los triángulos, tales como:

- La suma de sus ángulos internos es igual a 180°
- La suma de sus ángulos exteriores es igual a 360°
- El ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos interiores no adyacentes a él.



Donde:

<M= <B+<C
<P= <A+<B
<N= <A+<C

Teoremas de semejanza de triángulos

Dos triángulos de la misma forma son **semejantes.** Además, éstos deben cumplir con los siguientes teoremas:

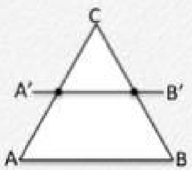
Teorema 1: dos triángulos son semejantes si tienen 2 ángulos homólogos

Teorema 2: dos triángulos son semejantes si sus tres lados son proporcionales

Teorema 3: dos triángulos son semejantes si tienen un ángulo igual y los lados que los forman son proporcionales.

Teorema de Tales

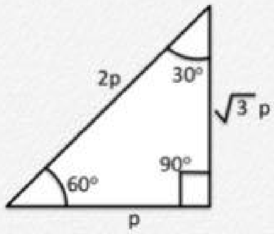
Cuando en un triángulo se traza una recta paralela a uno de los lados, el triángulo que se forma es semejante al primero.

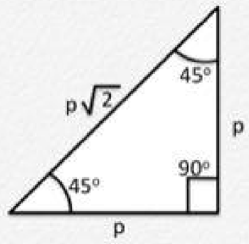


Si $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$ entonces $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$

Triángulos especiales

Existen tres distintos triángulos que te pueden ser de gran utilidad en el examen, siempre y cuando tengas en consideración sus condiciones y logres comprender bien sus relaciones. Éstos son:





Condiciones

1)Poseer un ángulo recto

2) Un ángulo de 30° y otro de 60°

3) Tres lados distintos

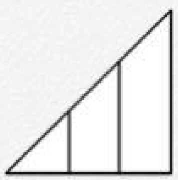
Condiciones

1) Poseer un ángulo recto

2) Un ángulo de 30° y otro de 60°

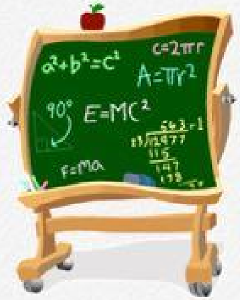
3) Dos catetos iguales

Triángulos equivalentes



En el que podemos aplicar las siguientes ternas pitagóricas:

- 3,4 y 5
- 6, 8 y 10
- 9, 12 y 15
- 5, 12 y 13.

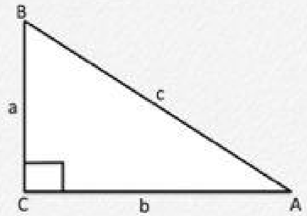


Así por ejemplo, si un cateto mide 3 y el otro 4, entonces su hipotenusa medirá 5 (primera terna)

O si un cateto mide 6 y otro 8, entonces la hipotenusa medirá 10 (segunda terna)

Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



c: hipotenusa

a y b: catetos

Teorema: $c^2=a^2+b^2$

5 Trigonometría

Funciones trigonométrica

Son las relaciones por cociente que se establecen entre los lados de un triángulo rectángulo y dependen únicamente de la magnitud del ángulo agudo que forman los lados del triángulo y no de la longitud de los mismos.

Seno $\theta = \dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$

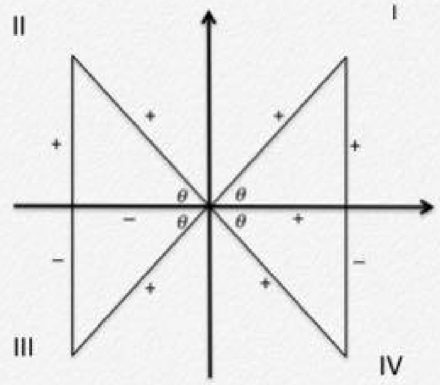
Cos $\theta = \dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$

Tan $\theta = \dfrac{sen\ \theta}{\cos\theta}$

Sec $\theta = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$

Csc $\theta = \dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$

Cot $\theta = \dfrac{\cos\theta}{sen\ \theta}$



Función	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
Seno	+	+	-	-
Coseno	+	-	-	+
Tangente	+	-	+	-
Cotangente	+	-	+	-
Secante	+	-	-	+
Cosecante	+	+	-	-

6

Probabilidad

Nociones básicas

Para cada suceso 'A' donde $0 \leq P(A) \leq 1$

donde P=0, P(A')=1-P(A)

$$P(A) = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles}$$

Así por ejemplo, en un dado ¿qué posibilidad hay de que caiga un 2 o un 5?

$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, así pues, existe 1 posibilidad de 6 de que caiga el número 2 y otra posibilidad de 6 de que caiga 5, y juntos existe la posibilidad de $\frac{1}{3}$

Otro caso, tenemos un dado, ¿qué posibilidad hay de que caiga un número primo?

Recordemos que los números primos que tiene un dado son 2, 3 y 5, por tanto:

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

Probabilidad condicional

Sucesos independientes: cuando los datos se reemplazan

Sucesos dependientes: cuando los datos no se reemplazan

Es muy importante lo anterior, puesto que cuando no hay reemplazos la fracción se hace más pequeña y por consiguiente existe una mayor probabilidad de que el resultado que esperamos salga.

Ejemplos:

¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con los siguientes dígitos: 2,3,5,6,7 y 9?
6x5x4=120
¿Qué sean menores a 600?
3x5x4=60
¿Qué sean impares?
5x4x4= 80
¿Qué sean múltiplos de 5?
5x4x1=20

7

Estadística

Media aritmética o promedio

Proporciona el punto medio o central de cierta cantidad de datos

$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i$ o lo que es lo mismo $\bar{X} = \frac{\sum n}{n}$ (la sumatoria de los datos entre el número de datos totales)

Ejemplo:

Obtén la mediana de los siguientes datos: 2,9,5,3,8,9,5 y 7

$$\bar{X} = \frac{5+6+9+7+9+7+8+5+8+6+7+9+10+4+7+5}{16} = \frac{112}{16} = 7$$

Por consiguiente, la media aritmética o promedia de los datos proporcionados es 7 ($\bar{X}$ =7)

Mediana

La mediana de un conjunto de datos se obtiene ordenando el conjunto de datos de menor a mayor, o de mayor a menor, y si el número de datos es impar existe solo un valor central, el cual es la *mediana*. Pero si el número de datos es par, tendremos dos términos centrales y la *mediana* será la media aritmética de los datos centrales (GÁMEZ, 2000, pág: 153).

Ejemplos:

1) Obtén la mediana de los siguientes datos: 5, 6, 9, 7, 9, 7, 8, 5, 8, 6, 7, 9, 10, 4, 7 y 5

Primero ordenamos los datos: 2, 3, 5, 5, 7, 8, 9, 9

Como el número de datos es par, es necesario sacar la media aritmética de los datos centrales (5 y 7)

$$M_e = \frac{5+7}{2} = 6$$

Por tanto, la mediana es 6.

2) Obtén la mediana de estos datos: 0, 20, 2, 35, 3, 1, 2

Ordenamos los datos: 0, 1, 2, 2, 3 20, 25

Debido a que el número de datos es impar, la mediana es: 2 (M_e=2)

Moda

La moda es el valor con una mayor frecuencia en una distribución de datos.

Ejemplo:

Obtén la moda de los siguientes datos: 5, 6, 9, 7, 9, 7, 8, 5, 8, 6, 7, 9, 10, 4, 7 y 5

Observamos los datos (si te es posible, construye una pequeña tabla que te facilite el trabajo)

Número	Frecuencia
4	1
5	3
6	2
7	4
8	2
9	3
10	1

Dado que el número 7 es el que tiene la mayor frecuencia, el 7 es la Moda (M_o=7)

8

Conjuntos

Conceptos básicos

Recuerda que un **conjunto** es la reunión, colección o agrupación de objetos que tienen características similares. A estos objetos se les denomina *elementos* de un conjunto.

Para simbolizar conjuntos se emplean las letras mayúsculas (A, B, C,..) y los elementos son separados por coma o punto y coma, además de que se encuentran entre llaves.

Subconjunto: se trata de un conjunto que a su vez pertenece a un conjunto más grande. Así pues, si todos los elementos del conjunto B pertenecen a su vez al conjunto A, entonces se dice que B es subconjunto de A ($B \subseteq A$)

Conjunto Universal: Es aquel conjunto que contiene todos los demás conjuntos (o subconjuntos), es simbolizado por la letra U.

Unión (AUB): La unión de dos conjuntos, A y B, es el conjunto formado por la agrupación de todos los elementos de A con todos los elementos de B.

Intersección ($A \cap B$): La intersección de dos conjuntos, A y B, es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a los dos conjuntos a la vez. (Elementos comunes a ambos).

Diferencia (A-B): La diferencia de dos conjuntos, A y B (en ese orden) es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a A pero no a B.

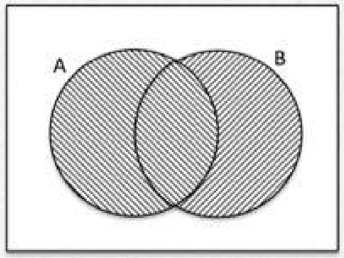
Diferencia (B-A): La diferencia de dos conjuntos B y A (en ese orden), es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a B pero no al conjunto A.

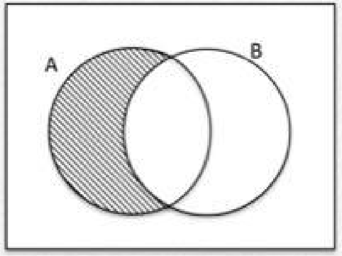
Complemento de un conjunto (A'): Conjunto cuyos elementos pertenecen al universo pero no al conjunto A.

Conjunto Nulo o vacío: Conjunto que no tiene elementos.

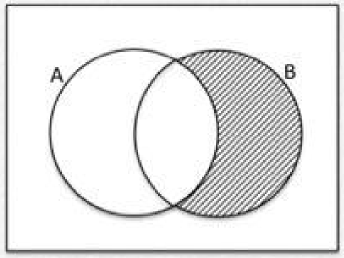
Diagramas de Venn. Representación de uno o varios conjuntos y sus operaciones mediante la delimitación de figuras planas como círculos o rectángulos. Los diagramas de Venn son representaciones gráficas y planas de las relaciones entre conjuntos, de forma que facilitan la comprensión de la teoría de conjuntos.

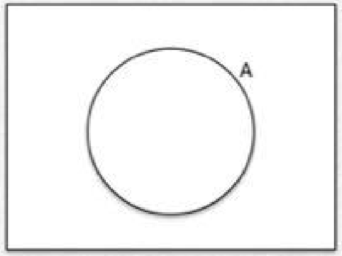
De manera gráfica se observan de la siguiente forma:



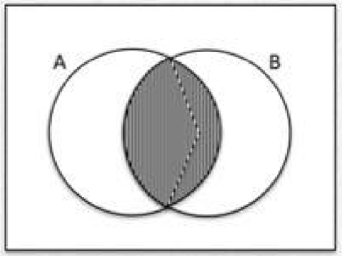


Unión: $A \cup B$ Diferencia de conjuntos: A-B





Diferencia de conjuntos: B-A Conjunto vacío: $\varnothing$=A



Intersección: $A \cap B$

Ejemplo:

U= {Números enteros positivos menores a 20}

A= {números primos tales que ≤ 2 x < 13}

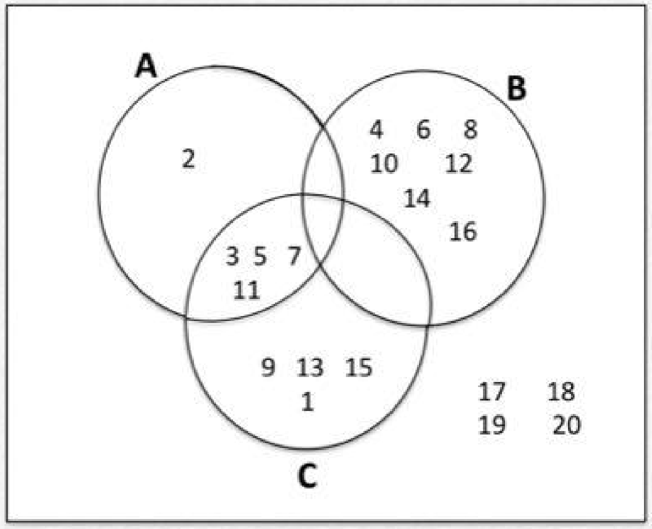
A= {2, 3,5, 6, 11}

B= {números pares tales que 2<x≤16}

B= {4,6,8,10,12,14,16}

C= {números impares tales que 1≤x≤15}

C= {1,3,5,7,9,11,13,15}



Donde:

$A \cap C = \{3,5,7,11\}$

Cálculo diferencial e integral

9

Sección 1

La derivada

Se trata de una medida de la rapidez con la que cambia el valor de una función en relación con el valor de su variable independiente, por consiguiente, solo puede hablarse de la derivada de una cierta función en un punto dado, la cual suele denotarse como $f'(x)$.

El método más común para encontrarla es la diferenciación, el cual es una de las herramientas principales en el área de las matemáticas conocida como cálculo.

Dos cosas importantes debes recordar:

1)una función de cambio es una función de grado menor y

2)Si la función es positiva, la función derivada es positiva; en cambio, si la función es negativa, la derivada será negativa.

Dado que se trata de una función polinomial, para poder efectuarla debes realizar lo siguiente:

1) En el primer término, multiplica el exponente por el coeficiente y el resultado anótalo como el nuevo coeficiente.

2) Se resta una unidad al exponente y se anota en el nuevo coeficiente

3) Si el resultado anterior es mayor o igual a uno, se mantiene la variable, de lo contrario se elimina y ahí termina la derivada

4) En caso de que se mantenga la variable, es necesario repetir los pasos 1 y 2 hasta que tengamos un término en donde solo quede el coeficiente.

Observémoslo de manera gráfica:

$f(x)= 2x^4-3x^3+8x^2+10x+22$

Paso 1:

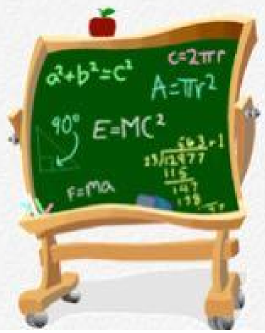
$f'(x)= 4(2)x= 8x$

Paso 2:

$f'(x)= 4-1= 8x^3$

Paso 3:

Como el nuevo coeficiente tiene un exponente mayor a 1, proseguimos con los demás términos hasta obtener lo siguiente:



$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 10x + 22$
$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 16x + 10$

Ejemplo:
$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 10x + 22$
$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 16x + 10$
$f''(x) = 24x^2 - 18x + 16$

Ahora bien, si en la PAEP, además de pedirte la razón de cambio, te proporcionan el valor de la variable, primero debes averiguar si haz de realizar una o dos derivadas, una vez que lo sepas, debes sustituir el valor de la variable y resolver la función y con ello obtener el resultado que se te solicita. Ejemplo:

$f(x) = 2x^4 - 3x^3 + 8x^2 + 10x + 22$; donde x=2

Así pues, derivamos una vez y sustituimos:

$f'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 16x + 10$
$f'(x) = 8(2)^3 - 9(2)^2 + 16(2) + 10$
$f'(x) = 8(8) - 9(4) + 16(2) + 10$
$f'(x) = 64 - 36 + 32 + 10$
$f'(x) = 106 - 36$
$f'(x) = 70$

Por consiguiente el resultado es 70

La integral o antiderivada

Se trata del proceso inverso de la derivada, de ahí que también se conozca como **antiderivada**; y se puede definir como una sumatoria infinita de cantidades infinitesimales, o como el área bajo una curva.

Ha pesar de que existen una gran cantidad de integrales, para esta prueba solo es necesario que conozcas dos tipos:

1) **Integral indefinida:** es el conjunto de las infinitas primitivas que puede tener una función; es decir, integral en la cual no contamos con límites y por consiguiente debe terminar con una constante (la cual se representa como *+c*)

La forma de una integral o antiderivada es:

$$\int x \; dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$$

La manera en que se resuelve es la siguiente:

$$\int (5x^3 + 2x^2 - 6x + 3)dx$$

1) A cada término que cuente con una variable se le suma una unidad al exponente, pero además, esa misma suma del exponente se coloca como denominador de dicho término

1.1) Si un término no cuenta con variable, en lugar de sumar una unidad, se le agrega una variable

1.2) Una vez que hayamos terminado con todos los términos de la función, se agrega la constante (+c)

$$\int = 5\frac{x^{3+1}}{3+1} + 2\frac{x^{2+1}}{2+1} - 6\frac{x^{1+1}}{1+1} + 3x + c$$

2) Se reducen los términos semejantes

$$\int = \frac{5x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 3x + c$$

$$\int (\frac{5x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 3x + c$$

2) **Integral definida**: Proceso de cálculo de áreas encerradas entre una curva y un eje cartesiano. Es decir, cuando se te proporcionan los límites de la integral, tal y como a continuación se muestra:

$$\int_a^b = f(b) - f(a)$$

Dado que se trata de una integral definida entre los límite 1 a 0, entonces la manera de proceder es similar a la integral indefinida, con la excepción de que contamos con límites, una vez integrada, deben sustituirse cada uno de los límites y restar el límite menor al mayor. Observemos un primer ejemplo:

$$\int_0^1 = (1-2x-3x^2)dx$$

1) Se integran cada uno de los términos

$$\frac{1x}{1} - \frac{2x^2}{2} - \frac{3x^3}{3}$$

2) Se sustituyen cada uno de los límites, de manera tal que se proceda a restar el límite menor al límite mayor

$$\int_0^1 = \frac{1(1)}{1} - \frac{2(1)^2}{2} - \frac{3(1)^3}{3} - \frac{1(0)}{1} - \frac{2(0)^2}{2} - \frac{3(0)^3}{3}$$

3) Una vez hecha la sustitución se resuelve la función:

$$\int_0^1 = \frac{1}{1} - \frac{2}{2} - \frac{3}{3} - 0$$

$$\int_0^1 = (1-1-1) - 0$$

$$\int_0^1 = (-1) - 0 = -1u^2$$

Y así la integral de $\int_0^1 = (1-2x-3x^2)dx$ es igual a **-1u²**.

Observemos otro ejemplo:

$$\int_1^2 = (5x^2 - 4x + 3)$$

1)Integramos

$$\int_1^2 = \frac{5x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + \frac{3x}{1}$$

2)Sustituimos los límites

$$\int_1^2 = \left(\frac{5(2)^3}{3} - \frac{4(2)^2}{2} + \frac{3(2)}{1}\right) - \left(\frac{5(1)^3}{3} - \frac{4(1)^2}{2} + \frac{3(1)}{1}\right)$$

3)Restamos y resolvemos

$$\int_1^2 = \left(\frac{5(8)}{3} - \frac{4(4)}{2} + \frac{3(2)}{1}\right) - \left(\frac{5(1)}{3} - \frac{4(1)}{2} + \frac{3(1)}{1}\right)$$

$$\int_1^2 = \left(\frac{40}{3} - \frac{16}{2} + \frac{6}{1}\right) - \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{2} + \frac{3}{1}\right)$$

$$\int_1^2 = \left(\frac{40}{3} - 8 + 6\right) - \left(\frac{5}{3} - 2 + 3\right)$$

$$\int_1^2 = \frac{35}{3} - \frac{3}{1} = \frac{35-9}{3}$$

$$\int_1^2 = \frac{26}{3}u^2$$

Y así la integral de $\int_1^2 = (5x^2 - 4x + 3)$ es igual a $\frac{26}{3}u^2$

Ejercicios y prueba

10

Algunos consejos

Antes de iniciar la prueba es necesario que tengas en consideración algunas cuestiones importantes.

Los tiempos para contestar cada parte de la PAEP varían de 20 a 35 minutos y el número de preguntas de 20 a 30, es decir, aproximadamente tienes un minuto por pregunta, tiempo en el cual deberás resolver y verificar tu pregunta, y aunque parece que es muy poco tiempo, si te preparas y desarrollas tus habilidades es posible conseguir un buen resultado.

La prueba que a continuación se te ofrece es similar a la PAEP, pero los ejercicios no son los mismos, por ello no es prudente que los memorices, su objetivo es que conozcas la manera en que está constituida la PAEP.

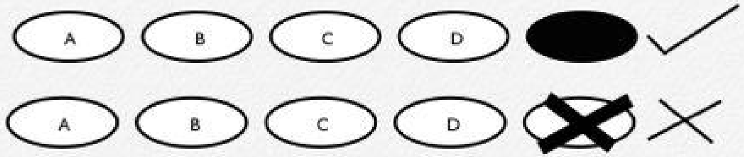
En cambio, lo que si te recomendamos es que comprendas y recuerdes las instrucciones pues son las mismas que las que aparecerán en tu prueba y con ello el día del examen ya no tengas la necesidad de leerlas y así podrás ahorrar ciertos segundos que en un examen contra el reloj siempre son útiles.

Lo único que no te proporciona este manual es una hoja de respuestas similar a la que se te proporcionará cuando presentes tu PAEP, pues creemos que es molesto que debas imprimir algo, tenemos que la idea de que todo lo que necesites esté dentro de este manual, es por ello que te pedimos que hagas tus anotaciones y respuestas en cualquier hoja con la finalidad de que al terminar puedas verificarlas (las respuestas están al final de este manual).

Sin embargo, a pesar de que no cuentes con hoja de respuesta, es importante que el día de tu examen si tomes muy en cuenta lo siguiente:

El llenado de tu hoja de respuesta es muy importante, así que ensombrece de manera correcta tu respuesta, en caso de equivocarte borra lo mejor posible pues la hoja es revisada a través de un lector óptico que capta la información, así que evita que la máquina se confunda.

Es indispensable que utilices un lápiz número 2 para llenar los alvéolos, procura que queden lo más ensombrecidos posibles.



Ten mucho cuidado si dejas alguna pregunta sin contestar, pues puedes confundirte con la siguiente pregunta lo que provocaría que a partir de ahí todas tus respuestas estén equivocadas.

Recuerda que el examen es contra reloj, así que el examen que a continuación se te ofrece responde cada uno de los ejercicios en un tiempo no mayor a un minuto a fin de que empieces a manejar y distribuir tus tiempos de respuesta.

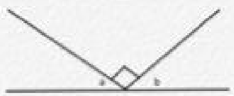
Ejercicios

Tiempo límite: 35 minutos.

Instrucciones: **Resuelva cada problema de esta sección usando cualquier espacio disponible de la página para hacer cálculos y anotaciones. Marque luego la única contestación correcta en el espacio correspondiente de la hoja de respuestas.**

Nota: Las figuras que acompañan a los ejercicios de esta prueba proveen información útil para resolverlos. Están dibujadas tan exactas como ha sido posible, EXCEPTO cuando se dice en un problema específico que la figura no ha sido dibujada a escala. Todas las figuras son planas, a menos que se indique lo contrario. Todos los números que se usan son números reales.

1.-Dada la siguiente figura, ¿cuál es el valor de a+b?



a)110°
b)90°
c)60°
d)45°
e)30°

2.- ¿Qué expresión sumada con $3x^3 - 8y^2 + 2z$ tiene como resultado $10x^3-5y-z$?
a) $2x^3+3y^2-1$
b) $-7x^3-3y^2+z$
c) $7x^3+3y^2+z$
d) $7x^3+3y^2+1$
e) x^3+3y^2-z

3.- Si $xyz \neq 0$ entonces $\frac{x^9y^4z^{10}}{xy^3z^5}$ es igual a:
a)$x^5y^6z^3$
b)xy^8z
c)x^8y^5z
d)x^8yz^5
e)$x^8y^2z^8$

4.- La probabilidad de que se obtenga un número primo en el lanzamiento de un par de dados bien balanceados es de:
a) $\frac{1}{2}$
b) $\frac{1}{6}$

c) $\frac{1}{8}$

d) $\frac{2}{6}$

e) $\frac{2}{8}$

5.- Un automóvil se dirige al norte de una ciudad a razón de 60km/h, al mismo tiempo, un camión se dirige al este de esa misma ciudad a una razón de 80km/h ¿cuál es la razón con la que varía la distancia entre los vehículos cuando ambos se encuentran a 30km y a 40km respectivamente?

a)100km/h

b)115km/h

c)200km/h

d)90km/h

e)no se puede determinar

6.- Se desea construir una rampa para subir a una plataforma de 12 metros de altura. Si la rampa debe empezar a una distancia de 16 metros de la orilla de la plataforma, su longitud en metros será

a)119

b)20

c)400

d)18

e)212

7.- Un polinomio de grado cuatro

a)Cuenta solamente con dos derivadas

b)No tiene derivadas

c)La derivada es un polinomio de grado tres

d)La derivada no afecta el grado

e)La tercera derivada es una constante

8.- Al simplificar la expresión $\sqrt{27}+\sqrt{48}-\sqrt{75}$ se obtiene:

a) $\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{2}$

d) $\sqrt{2}$

e) $2\sqrt{2}$

9.- ¿Cuál es la media aritmética de x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5?

a)x+1

b)x+1.5

c)x+2

d)x+2.5

e)x+4

10.- Una llave abierta 6 horas diarias durante 7 días arroja 6,120litros de agua ¿cuántos litros arrojará durante 14 días si se abre 4 horas diarias?

a) 7,200

b) 8,000
c) 7,526
d) 8,160
e) 9,202

11.- La resolución del siguiente sistema de ecuaciones es:

$$5a+3b=21$$
$$-2a+4b=2$$

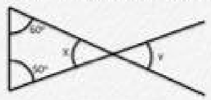
a) a=2 b=3
b) a=3 b=3
c) a=2 b=4
d)a=-3 b=-2
a=3 b=2

12.- Si un objeto se mueve siguiendo un comportamiento de acuerdo con la función del tiempo que está definida por la ecuación $x = - 4t3 + 20t2 + 80t + 100$, ¿cuál es la aceleración en un tiempo $t = 3$?
a)32
b)34
c)36
d) 48
e) 100

13.- ¿De qué numero es 480 el 30%?
a)1200
b)1400
c)1600
d)600
e)800

14.- Si el conjunto universal son los números dígitos, entonces el complemento del conjunto {3,5,7,9} es:
a){1,2,4,6,}
b){0,1,2,4,6}
c){0,1,2,4,6,8}
d){1,2,4,6,8}
e){1,2,6,8,}

15.- Dada la siguiente figura, el valor de y es igual a:



a)60°
b)70°
c)80°
d)90°
e)45°

16.- Si el punto A tiene coordenadas (1, 3) y el punto B tiene coordenadas (9, 8) ¿cuál es la distancia entre A y B?

a)10.6

b)9.6

c)8.6

d)7.6

e)6.6

17.- ¿Qué grupo de los siguientes se encuentra ordenado de manera descendente?

a) $\frac{7}{23}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}$

b) $\frac{7}{23}, \frac{1}{3}, \frac{2}{9}$

c) $\frac{2}{9}, \frac{1}{3}, \frac{7}{23}$

d) $\frac{1}{3}, \frac{7}{23}, \frac{2}{9}$

e) $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{7}{23}$

18.- $-\sqrt{9} - \{4^2 + 3\left[\sqrt[3]{27} + 4 \cdot 6\right] - 2^3\}$ es igual a:

a)-92

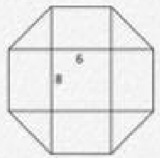
b)92

c)29

d)-29

e)44

19.- La siguiente figura está compuesta de 9 regiones, cuatro cuadrados, cuatro triángulos y un rectángulo. Si el rectángulo tiene de longitud 8 y de anchura 6, ¿cuál es el perímetro de la figura?



a) 68

b) 69

c) 72

d) 26

e) 39

20.- Si 96 es el 39 % de una cantidad, el 26 % de esa misma cantidad es:

a) 18

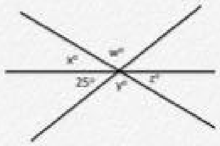
b) 26

c) 62

d) 64

e) faltan datos.

21.- En la siguiente figura, w+x+y+z es igual a:



a)330°
b)300°
c)310°
d)270°
e)240°

22.- ¿Cuál es la pendiente de la recta, en el plano coordenado, que contiene los puntos (4, 7) y (10, 9)?

a) $-\frac{1}{3}$
b) $\frac{1}{3}$
c) $-\frac{1}{2}$
d) $\frac{1}{2}$
e) 14

23 a 26.- Al encuestar a un grupo de estudiantes formado por 250 alumnos sobre sus preferencias respecto de los videojuegos, el cine y la música, se encontró que 115 prefieren los videojuegos: 160 prefieren el cine; 55 la música; 50 los videojuegos y el cine, 25 los videojuegos y la música; 30 el cine y la música y 20 tenían las tres preferencias. Determina lo siguiente

24.- Sólo una de las preferencias
a) 160
b) 180
c) 65
d) 85
e) 250

24.- Cuando mucho una de estas preferencias
a) 160
b) 180
c) 65
d) 85
e) 250

25.- Exactamente dos de estas preferencias
a) 160
b) 180
c) 65
d) 85
e) 250

26.- Cuando menos dos de estas dos preferencias
a) 160
b) 180
c) 65
d) 85

e) 250

27.- ¿Cuántos términos tiene el desarrollo de $(a + b)^5$?
a) 5
b) 6
c) 7
d) 8
e) 9

28.-Si el porcentaje de Sofía en cierta clase se incrementó de 84 a 92, ¿qué porcentaje aumentó su promedio?
a) 9%
b) 12%
c) $14\frac{2}{7}\%$
d) $6\frac{13}{25}\%$
e) $9\frac{13}{25}\%$

Instrucciones: **Cada uno de los siguientes ejercicios presenta dos cantidades, una en la Columna A y otra en la Columna B. Debe comparar ambas cantidades y marcar el espacio de la letra correspondiente en la hoja de respuestas, de acuerdo con lo siguiente:**

A) si la cantidad de la Columna A es mayor
B) si la cantidad de la Columna B es mayor
C) si ambas cantidades son iguales
D) si la relación NO puede determinarse utilizando la información que se proporciona

Notas:
En algunas preguntas la información referente a una o a ambas cantidades que habrán de compararse está ubicada arriba de ambas columnas.
Un símbolo que aparezca en ambas columnas representa lo mismo en la Columna A que en la B.
Las letras, tales como x, n, k, representan números reales.
Como sólo hay cuatro opciones para la respuesta, NUNCA MARQUE (E).

	Columna A	Columna B
29.-	$-t^2-99t+2430$	$(t-45)(t-54)$
30.-	Tan 60°	Tan 240°
31.-	$(25^2)(5^3)$	58
32.-	4x+4	5x
33.-	$\sqrt{85-49}$	$\sqrt{85}-\sqrt{49}$
34.-	El promedio de 100, 101 y 103	La mediana de 100, 101 y 103
35.-	$\sqrt[6]{9}\cdot\sqrt[2]{16}$	144
36.- Si a y b son números enteros, a=2 y b=-3, entonces:	29	$2a^2-2ab+b^2$

37.- En una caja se introducen todas las letras que forman la palabra "Matemáticas"

La probabilidad de sacar la letra "m"	La probabilidad de sacar la letra "a"

Prueba

Tiempo límite: 15 minutos.

Instrucciones: **Resuelva cada problema de esta sección usando cualquier espacio disponible de la página para hacer cálculos y anotaciones. Marque luego la única contestación correcta en el espacio correspondiente de la hoja de respuestas.**
Nota: **Las figuras que acompañan a los ejercicios de esta prueba proveen información útil para resolverlos. Están dibujadas tan exactas como ha sido posible, EXCEPTO cuando se dice en un problema específico que la figura no ha sido dibujada a escala. Todas las figuras son planas, a menos que se indique lo contrario. Todos los números que se usan son números reales.**

1.- El 45% de $2,500 es:
a) 1100
b) 1125
c) 1300
d) 1215
e)1245

2.- Dada la siguiente función, $x^3+2x+3x^2+10$ determina ¿cuál es el valor si existe una razón de cambio cuando x=2?
a) 26
b) 40
c) 32
d) 42
e) 24

3.- $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}}=$

a) $\frac{1}{5}$
b) $\frac{1}{6}$
c) $\frac{2}{6}$
d) $\frac{2}{5}$
e)12

4.- Si cos 30° = $\frac{\sqrt{3}}{2}$, entonces cos 330° será de:
a) $-\frac{1}{2}$
b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
c) $\frac{2}{\sqrt{3}}$
d)2
e)4

5.- En un grupo de 60 alumnos el 70% son mujeres, ¿cuál es el número de varones?
a)16
b)30
c)20
d)22
e)28

6.- Al lanzar un dado ¿qué probabilidad existe de obtener el número 2?
a) 1.6
b) 0.18
c) 0.14
d) 0.16
e) 0.22

7.- Encuentra la pendiente de una recta que pase por los siguientes pares de puntos: (-2, 0) y (3, 1)
a)5
b)1
c) $\frac{1}{5}$
d) $-\frac{1}{5}$
e)-5

8. Un aeroplano vuela siguiendo una ruta de forma cuadrada. Recorre el primer lado de ella a una velocidad de 160km/h, el segundo a 320, el tercero a 480 y el último a 640km/h¿cuál es la velocidad media?
a) 500
b) 320
c) 280
d) 400
e)300

Instrucciones: **Cada uno de los siguientes ejercicios presenta dos cantidades, una en la Columna A y otra en la Columna B. Debe comparar ambas cantidades y marcar el espacio de la letra correspondiente en la hoja de respuestas, de acuerdo con lo siguiente:**

A) si la cantidad de la Columna A es mayor
B) si la cantidad de la Columna B es mayor
C) si ambas cantidades son iguales
D) si la relación NO puede determinarse utilizando la información que se proporciona

Notas:
- **En algunas preguntas la información referente a una o a ambas cantidades que habrán de compararse está ubicada arriba de ambas columnas.**
- **Un símbolo que aparezca en ambas columnas representa lo mismo en la Columna A que en la B.**
- **Las letras, tales como x, n, k, representan números reales.**
- **Como sólo hay cuatro opciones para la respuesta, NUNCA MARQUE (E).**

	Columna A	Columna B
9.-	30%	$\frac{3}{10}$
10.-	x^2-18xy+80y^2	(x-8y)(x-10y)
11.-	$\sqrt{x^2}$	x
12.-	$\frac{5}{7}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{11}{13}$	$\frac{4}{6}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{13}$
13.-	$\frac{5}{8}de8$	$\frac{8}{5}de5$
14.-	El valor absoluto de "x"	x
15.- 12x+92=176	x	9
16.- El porcentaje que representa:	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{5}$

17.- Si w y z son enteros positivos y w-z=5

$\frac{8^w}{8^z}$	8^5

A manera de conclusión

11

¡Llego el día! ¿Qué es lo que te puedo recomendar? Lo primero, tranquilízate, es el consejo mas obvio, pero no por ello deja de ser el más importante.

Ten presente que perder el control te puede llevar a perder un buen resultado, estar tranquilo y lo mas confiado posible es llevar ya una gran ventaja. Recuerda, ya terminaste de estudiar el manual, no cometas el error de intentar estudiar la noche anterior, por el contrario, el día previo al examen relájate, realiza alguna actividad que te guste y en la medida de lo posible, descansa.

Tampoco caigas en un exceso de confianza, sal de la cama con tiempo, desayuna y llega con tiempo suficiente al examen para que te quites la tensión del viaje. El desayuno es un tema importante, debe ser una comida ligera pero energizante, que te ayude a tener los niveles de glucosa adecuados para poder realizar lo mejor posible tu examen, Retomando el aspecto del tiempo es importante que no llegues con el tiempo justo debido a que puede influir en la concentración, por ello es mejor que llegues con tiempo suficiente y puedas relajarte algunos instantes antes de iniciar la prueba.

Una vez en la prueba, date tu tiempo antes de iniciar, respira profundo, relájate por unos instantes y no olvides que te has preparado previamente para la prueba, por lo cual no debes estar nervioso.

Es importante que seas cuidadoso a la hora de contestar el examen, ya que lo único que es evaluado es lo que anotas en la hoja de respuestas, a pesar de que se te permite hacer anotaciones en el cuadernillo del examen, éstas no son tomadas en cuenta sino sólo lo que aparece en la hoja de respuestas. Las respuestas que marques serán revisadas a través de un lector óptico (computadora), lo que implica que no importa el procedimiento que seguiste para llegar a ellas.

Ten mucho cuidado con la hoja de respuestas, no hagas dos marcas en un mismo renglón, ya que se invalidarán ambas. Los espacios para las respuestas están indicados por letras que corresponden a las opciones sugeridas en el folleto. Estudia todas las opciones para decidir cuál de ellas es la correcta y ennegrece el espacio de la letra correspondiente asegurando que la marca sea hecha correctamente. Asegúrate de contestar en los espacios correspondientes, pues es común que te saltes alguna pregunta por parecer difícil o muy laboriosa, pero ten cuidado de que la siguiente respuesta sea llenada de forma correcta y con ello evitar hacerlo en algún lugar erróneo o haberte saltado alguna línea.

Debido a la manera como se evalúa la prueba, la contestación al azar de las preguntas cuya respuesta no sabes, probablemente no afecte la puntuación que obtengas. Cuando sepas que puedes eliminar una o más de las opciones, el adivinar una de las que quedan podría favorecerte, aunque claro, tampoco se debe abusar de esto.

Finalmente, algo que no debes perder de vista es que cada sección de la prueba contiene preguntas con diferentes grados de dificultad (aunque todas reciben el mismo crédito) por eso es recomendable que trates de responder el mayor número de preguntas independientemente del nivel de dificultad. Así que no pierdas el tiempo con preguntas que consideres demasiado difíciles, trabaja tan rápido como sea posible pero de forma precisa.

Pues estas listo, así que no me queda más que desearte suerte y mucho éxito.

Respuestas de la sección 10 - Ejercicios:

Número de pregunta	Respuesta
1	B
2	C
3	D
4	A
5	A
6	B
7	C
8	B
9	D
10	D
11	E
12	A
13	C
14	E
15	B
16	B
17	D
18	A

Número de pregunta	Respuesta
19	A
20	D
21	C
22	B
23	B
24	B
25	C
26	D
27	B
28	E
29	C
30	C
31	B
32	C
33	B
34	D
35	A
36	A
37	C

Prueba:

Número de pregunta	Respuesta
1	B
2	A
3	A
4	B
5	B
6	D
7	C
8	D
9	C
10	C
11	D
12	C
13	B
14	B
15	A
16	D
17	C

Antes de terminar este libro, nos gustaría conocer tú opinión, ¿qué te pareció?, ¿qué te gustó y qué no?, ¿qué le cambiarías? y ¿qué mejorarías?,¿realmente te fue útil? ¿te ayudó a estudiar? Tú opinión es muy importante para poder mejorar este libro y para ello te ofrecemos el siguiente widget en donde podrás dejarnos tus opiniones. Muchas gracias y mucha suerte con tu PAEP.

Déjanos aquí tus comentarios